

# **GÉOMÉTRIE ET MATHÉMATIQUES DISCRÈTES**

**MGA4U**

**12<sup>e</sup> année**

**Direction du projet :** Claire Trépanier  
**Coordination :** Richard Emond  
**Recherche documentaire :** Céline Pilon  
**Équipe de rédaction :** André Ladouceur, premier rédacteur  
Annik Ménard  
Elena Popescu  
**Consultation :** Michel Goulet  
Rodrigue St-Jean  
**Première relecture :** Centre franco-ontarien de ressources pédagogiques

Le ministère de l'Éducation de l'Ontario a fourni une aide financière pour la réalisation de ce projet mené à terme par le CFORP au nom des douze conseils scolaires de langue française de l'Ontario. Cette publication n'engage que l'opinion de ses auteures et auteurs.

Permission accordée au personnel enseignant des écoles de l'Ontario de reproduire ce document.

## TABLE DES MATIÈRES

<b>Introduction</b> .....	5
<b>Cadre d'élaboration des esquisses de cours</b> .....	7
<b>Aperçu global du cours</b> .....	9
<b>Aperçu global de l'unité 1 : Vecteurs</b> .....	15
Activité 1.1 : Introduction aux vecteurs .....	17
Activité 1.2 : Représentation de vecteurs par des composantes .....	20
Activité 1.3 : Produit scalaire .....	23
Activité 1.4 : Vecteurs colinéaires et vecteurs coplanaires .....	26
Activité 1.5 : Résolution de problèmes 1 .....	30
<b>Aperçu global de l'unité 2 : Droites et plans</b> .....	37
Activité 2.1 : Équations de droites dans le plan et dans l'espace .....	39
Activité 2.2 : Équations de plans et produit vectoriel .....	43
Activité 2.3 : Systèmes d'équations et intersections .....	46
Activité 2.4 : Résolution de problèmes 2 .....	49
Activité 2.5 : Tâche d'évaluation sommative - Géométrie dans l'espace .....	52
<b>Aperçu global de l'unité 3 : Démonstrations</b> .....	57
Activité 3.1 : Propositions, implications et réciproques .....	59
Activité 3.2 : Preuve indirecte et l'énoncé <i>si et seulement si</i> .....	62
Activité 3.3 : Démonstrations par déduction .....	67
Activité 3.4 : Démonstrations au moyen de la géométrie analytique et des vecteurs .....	72
Activité 3.5 : Résolution de problèmes 3 .....	77
<b>Aperçu global de l'unité 4 : Combinatoire</b> .....	83
Activité 4.1 : Dénombrements et arrangements .....	85
Activité 4.2 : Manipulations algébriques .....	88
Activité 4.3 : Combinaisons .....	91
Activité 4.4 : Combinaisons avec objets identiques .....	95
Activité 4.5 : Résolution de problèmes 4 .....	98
<b>Aperçu global de l'unité 5 : Formule du binôme</b> .....	107
Activité 5.1 : Développement du binôme à l'aide du triangle de Pascal .....	109
Activité 5.2 : Développement du binôme à l'aide de $\binom{n}{k}$ .....	111
Activité 5.3 : Raisonnement par récurrence .....	114
Activité 5.4 : Relations associées au triangle de Pascal .....	118
Activité 5.5 : Résolution de problèmes 5 .....	121
<b>Tableau des attentes et des contenus d'apprentissage</b> .....	127



## INTRODUCTION

Le ministère de l'Éducation (MÉO) dévoilait au début de 1999 les nouveaux programmes-cadres de 9<sup>e</sup> et de 10<sup>e</sup> année et en juin 2000 ceux de 11<sup>e</sup> et de 12<sup>e</sup> année. En vue de faciliter la mise en oeuvre de ce tout nouveau curriculum du secondaire, des équipes d'enseignantes et d'enseignants, provenant de toutes les régions de l'Ontario, ont été chargées de rédiger, de valider et d'évaluer des esquisses directement liées aux programmes-cadres du secondaire pour chacun des cours qui serviraient de guide et d'outils de travail à leurs homologues. Les esquisses de cours, dont l'utilisation est facultative, sont avant tout des suggestions d'activités pédagogiques, et les enseignantes et enseignants sont fortement invités à les modifier, à les personnaliser ou à les adapter au gré de leurs propres besoins.

Les esquisses de cours répondent aux attentes des systèmes scolaires public et catholique. Certaines esquisses de cours se présentent en une seule version commune aux deux systèmes scolaires (p. ex., *Mathématiques* et *Affaires et commerce*), tandis que d'autres existent en version différenciée. Dans certains cas, on a ajouté un préambule à l'esquisse de cours explicitant la vision catholique de l'enseignement du cours en question (p. ex., *Éducation technologique*) alors que, dans d'autres cas, on a en plus élaboré des activités propres aux écoles catholiques (p. ex., *Éducation artistique*). L'Office provincial de l'éducation catholique de l'Ontario (OPÉCO) a participé à l'élaboration des esquisses destinées aux écoles catholiques.

Chacune des esquisses de cours reprend en tableau les attentes et les contenus d'apprentissage du programme-cadre avec un système de codes qui lui est propre. Ce tableau est suivi d'un Cadre d'élaboration des esquisses de cours qui présente la structure des esquisses. Toutes les esquisses de cours ont un Aperçu global du cours qui présente les grandes lignes du cours et qui comprend, à plus ou moins cinq reprises, un Aperçu global de l'unité. Ces unités englobent diverses activités qui mettent l'accent sur des sujets variés et des tâches suggérées aux enseignantes ou enseignants ainsi qu'aux élèves dans le but de faciliter l'apprentissage et l'évaluation.

Toutes les esquisses de cours comprennent une liste partielle de ressources disponibles (p. ex., personnes-ressources, médias électroniques) qui a été incluse à titre de suggestion et que les enseignantes et enseignants sont invités à enrichir et à mettre à jour.

Étant donné l'évolution des projets du ministère de l'Éducation concernant l'évaluation du rendement des élèves et compte tenu que le dossier d'évaluation fait l'objet d'un processus continu de mise à jour, chaque esquisse de cours suggère quelques grilles d'évaluation du rendement ainsi qu'une tâche d'évaluation complexe et authentique à laquelle s'ajoute une grille de rendement.



## CADRE D'ÉLABORATION DES ESQUISSES DE COURS

APERÇU GLOBAL DU COURS	APERÇU GLOBAL DE L'UNITÉ	ACTIVITÉ
Espace réservé à l'école <i>(à remplir)</i>	Description et durée	Description et durée
Description/fondement	Domaines, attentes et contenus d'apprentissage	Domaines, attentes et contenus d'apprentissage
Titres, descriptions et durée des unités	Titres et durée des activités	Notes de planification
Stratégies d'enseignement et d'apprentissage	Liens	Déroulement de l'activité
Évaluation du rendement de l'élève	Mesures d'adaptation pour répondre aux besoins des élèves	Annexes
Ressources	Évaluation du rendement de l'élève	
Application des politiques énoncées dans <i>ÉSO</i> - 1999	Sécurité	
Évaluation du cours	Ressources	
	Annexes	



## APERÇU GLOBAL DU COURS (MGA4U)

### Espace réservé à l'école (à remplir)

<b>École :</b>	<b>Conseil scolaire de district :</b>
<b>Section :</b>	<b>Chef de section :</b>
<b>Personne(s) élaborant le cours :</b>	<b>Date :</b>
<b>Titre du cours :</b> Géométrie et mathématiques discrètes	<b>Année d'études :</b> 12 <sup>e</sup>
<b>Type de cours :</b> Préuniversitaire	<b>Code de cours de l'école :</b>
<b>Programme-cadre :</b> Mathématiques	<b>Date de publication :</b> 2000
<b>Code de cours du Ministère :</b> MGA4U	<b>Valeur en crédit :</b> 1

**Cours préalable :** Fonctions et relations, 11<sup>e</sup> année, cours préuniversitaire

### Description/fondement

Ce cours met l'accent sur la résolution de problèmes complexes et sur le raisonnement inductif et déductif en mathématiques. L'élève résout, de façon géométrique et algébrique, des problèmes de vecteurs et détermine des intersections de droites et de plans dans l'espace. Il ou elle développe aussi sa compréhension de la démonstration en recourant à des méthodes déductives, algébriques, vectorielles et indirectes. L'élève résout également des problèmes en utilisant des techniques de combinatoire et fait des démonstrations d'après un raisonnement mathématique inductif.

### Titres, descriptions et durée des unités

#### Unité 1 : Vecteurs

**Durée : 23 heures**

Cette unité porte sur les vecteurs. L'élève développe le concept du vecteur en partant des notions intuitives, basées sur des segments de droites orientés, additionne, soustrait, multiplie et détermine le produit scalaire ainsi que le produit vectoriel de vecteurs de façon géométrique et au moyen de composantes. Elle ou il modélise ensuite des situations géométriques au moyen de l'algèbre pour traiter de la géométrie dans l'espace.

#### Unité 2 : Droites et plans

**Durée : 26 heures**

Cette unité porte sur l'intersection de droites et de plans dans l'espace. L'élève développe les équations de plans et de droites dans l'espace, et détermine l'intersection de ceux-ci en résolvant des systèmes linéaires d'équations à l'aide de matrices. Elle ou il résout des problèmes

d'applications basés sur l'intersection de droites et de plans ainsi que sur diverses notions géométriques, puis interprète les solutions obtenues.

### **Unité 3 : Démonstrations**

**Durée : 22 heures**

Cette unité porte sur la démonstration et la résolution de problèmes. L'élève établit des propriétés de figures planes à l'aide de la géométrie analytique, de démonstrations algébriques et de méthodes vectorielles pour développer ses compétences en résolution de problèmes. Elle ou il utilise une variété de stratégies et d'approches pour résoudre des problèmes tout en justifiant clairement les étapes de son raisonnement.

### **Unité 4 : Combinatoire**

**Durée : 21 heures**

Cette unité porte sur les principes de base de la mathématique discrète. L'élève apprend, par découverte et par tâtonnements, les notions de base du dénombrement, des arrangements et des combinaisons pour résoudre divers problèmes de combinatoire. Elle ou il utilise la notation appropriée liée aux problèmes d'arrangement, de permutation ainsi que de combinaison et évalue des expressions numériques faisant appel à la notation factorielle.

### **Unité 5 : Formule du binôme**

**Durée : 18 heures**

Cette unité porte sur la formule du binôme et le raisonnement par récurrence. L'élève développe le binôme à l'aide du triangle arithmétique de Pascal et des notions de combinatoire, résout des problèmes qui ont trait au développement du binôme, puis montre diverses propositions à l'aide du raisonnement par récurrence.

## **Stratégies d'enseignement et d'apprentissage**

Dans ce cours, l'enseignant ou l'enseignante privilégie diverses stratégies d'enseignement et d'apprentissage. Parmi les plus adaptées à ce cours, il convient de noter les suivantes :

- activités dirigées de réflexion
- apprentissage coopératif
- compte rendu de lecture
- discussions
- exercices en petits groupes
- exposé
- manipulation d'objets
- réflexion à voix haute
- visualisation
- activités de découverte
- classement
- devoirs
- enquête
- explications orales
- modèle
- recherche
- remue-ménages

## **Évaluation du rendement de l'élève**

«Un système d'évaluation et de communication du rendement bien conçu s'appuie sur des attentes et des critères d'évaluation clairement définis.» (*Planification des programmes et évaluation - Le curriculum de l'Ontario de la 9<sup>e</sup> à la 12<sup>e</sup> année, 2000, p. 16-19*) L'évaluation sera basée sur les attentes du curriculum en se servant de la grille d'évaluation du programme-cadre.

Le personnel enseignant doit utiliser des stratégies d'évaluation qui :

- portent sur la matière enseignée et sur la qualité de l'apprentissage des élèves;
- tiennent compte de la grille d'évaluation du programme-cadre correspondant au cours, laquelle met en relation quatre grandes compétences et les descriptions des niveaux de rendement;
- sont diversifiées et échelonnées tout le long des étapes de l'évaluation pour donner aux élèves des possibilités suffisantes de montrer l'étendue de leur acquis;
- conviennent aux activités d'apprentissage, aux attentes et aux contenus d'apprentissage, de même qu'aux besoins et aux expériences des élèves;
- sont justes pour tous les élèves;
- tiennent compte des besoins des élèves en difficulté, conformément aux stratégies décrites dans leur plan d'enseignement individualisé;
- tiennent compte des besoins des élèves qui apprennent la langue d'enseignement;
- favorisent la capacité de l'élève à s'autoévaluer et à se fixer des objectifs précis;
- reposent sur des échantillons des travaux de l'élève qui illustrent bien son niveau de rendement;
- servent à communiquer à l'élève la direction à prendre pour améliorer son rendement;
- sont communiquées clairement aux élèves et aux parents au début du cours et à tout autre moment approprié pendant le cours.

La grille d'évaluation du rendement sert de point de départ et de cadre aux pratiques permettant d'évaluer le rendement des élèves. Cette grille porte sur quatre compétences, à savoir : connaissance et compréhension; réflexion et recherche; communication; et mise en application. Elle décrit les niveaux de rendement pour chacune des quatre compétences. La description des niveaux de rendement sert de guide pour recueillir des données et permet au personnel enseignant de juger de façon uniforme de la qualité du travail réalisé et de fournir aux élèves et à leurs parents une rétroaction claire et précise.

Le niveau 3 (70 %-79 %) constitue la norme provinciale. Les élèves qui n'atteignent pas le niveau 1 (moins de 50 %) à la fin du cours n'obtiennent pas le crédit de ce cours. Une note finale est inscrite à la fin de chaque cours et le crédit correspondant est accordé si l'élève a obtenu une note de 50 % ou plus. Pour chaque cours de la 9<sup>e</sup> à la 12<sup>e</sup> année, la note finale sera déterminée comme suit :

- Soixante-dix pour cent de la note est le pourcentage venant des évaluations effectuées tout le long du cours. Cette proportion de la note devrait traduire le niveau de rendement le plus fréquent pendant la durée du cours, bien qu'il faille accorder une attention particulière aux plus récents résultats de rendement.
- Trente pour cent de la note est le pourcentage venant de l'évaluation finale qui prendra la forme d'un examen, d'une activité, d'une dissertation ou de tout autre mode d'évaluation approprié et administré à la fin du cours.

Dans tous leurs cours, les élèves doivent avoir des occasions multiples et diverses de montrer à quel point elles ou ils ont satisfait aux attentes du cours, et ce, pour les quatre compétences. Pour évaluer de façon appropriée le rendement de l'élève, l'enseignant ou l'enseignante utilise une variété de stratégies se rapportant aux types d'évaluation suivants :

### **évaluation diagnostique**

- courtes activités au début de l'unité pour vérifier les acquis préalables (p. ex., questions au début de la leçon, pendant le travail ou la recherche)

### **évaluation formative**

- activités continues, individuelles ou de groupe (p. ex., commentaires, observations, autoévaluations, évaluations par les pairs, devoirs, exercices)
- objectivation : processus d'autoévaluation permettant à l'élève de se situer par rapport à l'atteinte des attentes ciblées par les activités d'apprentissage (p. ex., questionnaire, liste de vérification). L'énoncé qui renvoie à l'objectivation est désigné par le code (O)

### **évaluation sommative**

- activités de façon continue, mais particulièrement en fin d'activité ou en fin d'unité à l'aide de divers moyens (p. ex., épreuves écrites, projets)

## **Ressources**

L'enseignant ou l'enseignante fait appel à plus ou moins quatre types de ressources à l'intérieur du cours. Ces ressources sont davantage détaillées dans chaque unité. Dans ce document, les ressources suivies d'un astérisque (\*) sont en vente à la Librairie du Centre du CFORP. Celles suivies de trois astérisques (\*\*\*) ne sont en vente dans aucune librairie. Allez voir dans votre bibliothèque scolaire.

### **Ouvrages généraux/de référence/de consultation**

AMYOTTE, Luc, *Introduction à l'algèbre linéaire et à ses applications*, Saint-Laurent, Éditions du Renouveau pédagogique, 1999, 433 p. \*

BISSONNETTE, Steve, et Mario RICHARD, *Comment construire des compétences en classe*, Montréal, Les Éditions de la Chenelière, 2000, 138 p. \*

LASNIER, François, *Réussir la formation par compétences*, Montréal, Guérin Éditeur, 2000, 485 p. \*

LEMAY, Bernadette, *La boîte à outils*, Esquisse de cours 9<sup>e</sup>, Vanier, CFORP, 1999. \*

*Problems, Problems, Problems, vol. 3*, Waterloo, Waterloo Mathematics Foundation, 1990, 188 p.

*Problems, Problems, Problems, vol. 5*, Waterloo, Waterloo Mathematics Foundation, 1992, 151 p.

STEWART, J., *et al.*, *Algèbre et géométrie*, Montréal, Guérin Éditeur, 1993, 503 p.

### **Médias électroniques**

*Cybergéomètre, version 3 pour Windows*, Montréal, Les Éditions de la Chenelière, 1999.

## **Application des politiques énoncées dans ÉSO - 1999**

Cette esquisse de cours reflète les politiques énoncées dans *Les écoles secondaires de l'Ontario de la 9<sup>e</sup> à la 12<sup>e</sup> année - Préparation au diplôme d'études secondaires de l'Ontario*, 1999 au

sujet des besoins des élèves en difficulté d'apprentissage, de l'intégration des technologies, de la formation au cheminement de carrière, de l'éducation coopérative et de diverses expériences de travail, ainsi que certains éléments de sécurité.

## **Évaluation du cours**

L'évaluation du cours est un processus continu. Les enseignantes et les enseignants évaluent l'efficacité de leur cours de diverses façons, dont les suivantes :

- évaluation continue du cours par l'enseignant ou l'enseignante : ajouts, modifications, retraits tout le long de la mise en œuvre de l'esquisse de cours (sections Stratégies d'enseignement et d'apprentissage ainsi que Ressources, Activités, Applications à la région);
- évaluation du cours par les élèves : sondages au cours de l'année ou du semestre;
- rétroaction à la suite des tests provinciaux;
- examen de la pertinence des activités d'apprentissage et des stratégies d'enseignement et d'apprentissage (dans le processus des évaluations formative et sommative des élèves);
- échanges avec les autres écoles utilisant l'esquisse de cours;
- autoévaluation de l'enseignant et de l'enseignante;
- visites d'appui des collègues ou de la direction et visites aux fins d'évaluation de la direction;
- évaluation du degré de réussite des attentes et des contenus d'apprentissage des élèves (p. ex., après les tâches d'évaluation de fin d'unité et l'examen synthèse).

De plus, le personnel enseignant et la direction de l'école évaluent de façon systématique les méthodes pédagogiques et les stratégies d'évaluation du rendement de l'élève.



## APERÇU GLOBAL DE L'UNITÉ 1 (MGA4U)

### Vecteurs

#### Description

**Durée** : 23 heures

Cette unité porte sur les vecteurs. L'élève développe le concept du vecteur en partant des notions intuitives, basées sur des segments de droites orientés, additionne, soustrait, multiplie et détermine le produit scalaire ainsi que le produit vectoriel de vecteurs de façon géométrique et au moyen de composantes. Elle ou il modélise ensuite des situations géométriques au moyen de l'algèbre pour traiter de la géométrie dans l'espace.

#### Domaines, attentes et contenus d'apprentissage

**Domaines** : Géométrie, Démonstrations et résolution de problèmes

**Attentes** : MGA4U-G-A.1  
MGA4U-D-A.2 - 3

**Contenus d'apprentissage** : MGA4U-G-Opé.1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8  
MGA4U-D-Stra.1 - 2 - 4  
MGA4U-D-Prob.3

#### Titres des activités

#### Durée

<b>Activité 1.1</b> : Introduction aux vecteurs	300 minutes
<b>Activité 1.2</b> : Représentation de vecteurs par des composantes	360 minutes
<b>Activité 1.3</b> : Produit scalaire	300 minutes
<b>Activité 1.4</b> : Vecteurs colinéaires et vecteurs coplanaires	120 minutes
<b>Activité 1.5</b> : Résolution de problèmes 1	300 minutes

#### Liens

L'enseignant ou l'enseignante prévoit l'établissement de liens entre le contenu du cours et l'animation culturelle (AC), la technologie (T), les perspectives d'emploi (PE) et les autres matières (AM) au moment de sa planification des stratégies d'enseignement et d'apprentissage. Des suggestions pratiques sont intégrées dans la section Déroulement de l'activité des activités de cette unité.

## Mesures d'adaptation pour répondre aux besoins des élèves

L'enseignant ou l'enseignante doit planifier des mesures d'adaptation pour répondre aux besoins des élèves en difficulté et de celles et ceux qui suivent un cours d'ALF/PDF ainsi que des activités de renforcement et d'enrichissement pour tous les élèves. L'enseignant ou l'enseignante trouvera plusieurs suggestions pratiques dans *La boîte à outils*, p. 11-21.

## Évaluation du rendement de l'élève

L'évaluation fait partie intégrante de la dynamique pédagogique. L'enseignant ou l'enseignante doit donc planifier et élaborer en même temps les activités d'apprentissage et les étapes de l'évaluation en fonction des quatre compétences de base. Des exemples des différents types d'évaluation tels que l'évaluation diagnostique (ED), l'évaluation formative (EF) et l'évaluation sommative (ES) sont suggérés dans la section Déroulement de l'activité des activités de cette unité.

## Sécurité

L'enseignant ou l'enseignante veille au respect des règles de sécurité du Ministère et du conseil scolaire.

## Ressources

Dans cette unité, l'enseignant ou l'enseignante utilise les ressources suivantes :

### Ouvrages généraux/de référence/de consultation

ANDERSON, E., *et al.*, *Algèbre et géométrie*, Montréal, Les Éditions de la Chenelière, 1993, 399 p. \*\*\*

CHARRON, Gilles, et Pierre PARENT, *Algèbre linéaire et géométrie vectorielle*, Laval, Éditions, Études Vivantes, 1999, 470 p. \*

LAFORTUNE, Louise, *Mathématique 536*, coll. Mathophilie, Montréal, Guérin Éditeur, 1998, 465 p. \*

OUELLET, Gilles, *Algèbre linéaire - vecteurs et géométrie*, Sainte-Foy, Les éditions Le Griffon d'argile, 1994, 476 p. \*

### Médias électroniques

*Déterminer la résultante*, tfo, BPN 345302, coul., 10 min (série Vecteurs).

*Force*, tfo, BPN 345305, coul., 10 min (série Vecteurs).

*Forces appliquées*, tfo, BPN 345306, coul., 10 min (série Vecteurs).

*Les couples*, tfo, BPN 345303, coul., 10 min (série Vecteurs).

*Résoudre sans tableau quadrillé*, tfo, BPN 345304, coul., 10 min (série Vecteurs).

*Suivez la flèche*, tfo, BPN 345301, coul., 10 min (série Vecteurs).

## ACTIVITÉ 1.1 (MGA4U)

### Introduction aux vecteurs

#### Description

**Durée :** 300 minutes

Dans cette activité, l'élève se familiarise avec les aspects géométriques et algébriques des vecteurs pour résoudre des problèmes de vitesse et de force en faisant appel à des diagrammes ainsi qu'à la trigonométrie. Elle ou il aborde aussi la notion de projection d'un vecteur sur un autre.

#### Domaines, attentes et contenus d'apprentissage

**Domaine :** Géométrie

**Attente :** MGA4U-G-A.1

**Contenus d'apprentissage :** MGA4U-G-Opé.1 - 2 - 3 - 4

#### Notes de planification

- Se procurer un chariot pour faire la mise en situation.
- Préparer des exercices sur la représentation d'un vecteur par un segment de droite orienté, sur l'addition et la soustraction de vecteurs et sur la multiplication d'un vecteur par un scalaire.
- Préparer des exercices sur la trigonométrie dans un triangle, sur la loi des sinus ainsi que sur la loi du cosinus qui serviront d'évaluation diagnostique.
- Préparer du travail à l'élève qui a besoin d'aide supplémentaire.
- Réserver un téléviseur et un magnétoscope, et se procurer les vidéos de la série «Vecteurs» produits par tfo.
- Préparer des problèmes de vitesse et de force, y compris des cas où la résultante est donnée.

#### Déroulement de l'activité

##### Mise en situation

- Demander à deux élèves de pousser un chariot à une vitesse constante, l'un pousse le chariot dans une direction et l'autre pousse le chariot de côté.
- Demander ensuite au groupe-classe d'expliquer la façon de s'y prendre pour déterminer la vitesse du chariot, c'est-à-dire sa vitesse en diagonale, en partant de la vitesse des deux élèves. **(AM) (ED)**

- Présenter à l'élève l'exemple d'un avion qui doit se rendre à un endroit à une vitesse donnée et dont le pilote doit tenir compte d'un vent provenant du côté, puis lui demander la façon dont le pilote doit calculer la trajectoire et la vitesse à atteindre. **(AM)**
- Animer un échange sur ces situations et sur l'utilisation des vecteurs pour résoudre ce genre de problème. **(ED)**

## **Expérimentation/Exploration/Manipulation**

### *Introduction aux vecteurs*

- Présenter à l'élève, au tableau ou sur un transparent, le concept de vecteur de même que les concepts de vecteur opposé, de vecteur nul, de vecteurs égaux, de sens, de direction, de longueur, d'origine et d'extrémité d'un vecteur, de l'angle entre deux vecteurs ainsi que la notation associée à ces concepts.
- Présenter à l'élève l'addition et la soustraction de vecteurs, le produit d'un vecteur par un scalaire ainsi que des exemples qui lui permettent de découvrir les principales propriétés algébriques de ces opérations, y compris la loi de Chasles ( $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$  et  $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$ ).
- Remettre à l'élève des exercices qui lui permettent de représenter des vecteurs au moyen de segments orientés, d'additionner et de soustraire des vecteurs ainsi que de les multiplier par un scalaire.
- Présenter à l'élève des problèmes de vitesse et de force à résoudre à l'aide de la représentation géométrique de vecteurs sur du papier quadrillé. **(AM)**
- Demander à l'élève de comparer ses résultats à ceux des autres et de circuler pour corriger le plus vite possible les faiblesses, tant sur le plan des concepts que de la notation et de la communication. **(EF)**

### *Applications des vecteurs à l'aide de la trigonométrie*

- Revoir avec l'élève, à l'aide d'exemples faits au tableau, les rapports trigonométriques ainsi que les lois des sinus et du cosinus.
- Présenter à l'élève des exercices qui portent sur la trigonométrie d'un triangle rectangle et l'utilisation de la loi des sinus et de la loi du cosinus.
- Corriger en envoyant un ou une élève écrire sa solution au tableau et, au besoin, aider l'élève qui éprouve de la difficulté ou lui proposer des exercices supplémentaires. **(ED)**
- Présenter à l'élève des situations qui lui permettent de modéliser, puis de résoudre des problèmes de vecteur-vitesse et de force à l'aide de calculs ainsi que de la trigonométrie, puis l'inviter à vérifier la justesse et la clarté du développement avec ses pairs. **(EF) (AM)**

### *Projection d'un vecteur sur un autre*

- Présenter à l'élève, au tableau ou sur un transparent, les concepts de projection d'un vecteur sur un autre et de composante d'un vecteur sur un autre, puis lui donner des situations où il faut les déterminer sur du papier quadrillé.
- Montrer à l'élève que pour ce qui est d'un angle  $\theta$  aigu entre deux vecteurs, la projection d'un vecteur  $\vec{a}$  sur un vecteur  $\vec{b}$  est égale à  $|\vec{a}|\cos\theta$ , puis lui demander de montrer qu'on obtient la même formule si  $\theta$  est droit ou obtus.

- Visionner avec l'élève les six vidéos de la série «Vecteurs», produits par tfo, puis, après chaque visionnage, animer une mise en commun d'idées pour faire ressortir les concepts présentés dans l'émission.
- Poser à l'élève, après le visionnage des vidéos, des questions, comme celles ci-après, auxquelles elle ou il doit répondre en travaillant en équipe de deux :
  - *Expliquer la manière dont un vecteur est à la fois un concept géométrique et un concept algébrique.*
  - *Expliquer la différence entre la composante et la projection d'un vecteur sur un autre.*
- Animer une mise en commun d'idées pour échanger sur les réponses à ces questions. **(EF)**
- Présenter à l'élève des situations où il faut résoudre des problèmes de vecteur-vitesse et de force où la résultante est donnée, puis les corriger en demandant à un ou à une élève de présenter sa solution sur un transparent. **(EF) (AM)**

### **Évaluation sommative**

- Voir **Évaluation sommative** de l'activité 1.5.

### **Activités complémentaires/Réinvestissement**

- Demander à l'élève d'effectuer une recherche sur d'autres applications des vecteurs en sciences et de présenter les résultats de cette recherche au groupe-classe. **(AM)**

### **Annexes**

**(espace réservé à l'enseignant ou à l'enseignante pour l'ajout de ses propres annexes)**

## ACTIVITÉ 1.2 (MGA4U)

### Représentation de vecteurs par des composantes

#### Description

**Durée** : 360 minutes

Dans cette activité, l'élève représente des vecteurs, dans le plan et dans l'espace, au moyen de composantes et développe les outils algébriques nécessaires pour poursuivre l'étude de la géométrie dans l'espace.

#### Domaines, attentes et contenus d'apprentissage

**Domaine** : Géométrie

**Attente** : MGA4U-G-A.1

**Contenus d'apprentissage** : MGA4U-G-Opé.6 - 7

#### Notes de planification

- Préparer un modèle d'un repère cartésien dans l'espace.
- Préparer les exemples, les exercices et les problèmes qui seront utilisés dans l'activité.

#### Déroulement de l'activité

##### Mise en situation

- Inviter un ou une élève à se lever, puis demander au groupe-classe de décrire la position des pieds de l'élève ainsi que celle de sa tête dans le but de faire ressortir le besoin de repères (p. ex., les murs et le plancher de la salle de classe) et de trois valeurs numériques pour décrire la position d'un objet dans l'espace. **(ED)**

##### Expérimentation/Exploration/Manipulation

###### *Introduction au repère cartésien dans l'espace*

- Présenter à l'élève, à l'aide d'un modèle (p. ex., en carton), un repère cartésien dans l'espace, les plans formés par les axes, les huit trièdres et les coordonnées des points.
- Montrer à l'élève, sur un transparent ou au tableau, la manière de représenter, sur papier, des points dans l'espace.
- Assigner à l'élève un exercice qui lui demande de placer des points dans l'espace.
- Corriger à l'aide des pairs.

- Reprendre avec l'élève le modèle en carton pour lui présenter les composantes des vecteurs et les vecteurs de base  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$ .
- Donner à l'élève les composantes de vecteurs pour qu'elle ou il les représente sur papier, puis lui demander de comparer ses résultats avec ceux de ses pairs. **(EF)**

*Aspects algébriques avec coordonnées et composantes*

- Présenter à l'élève deux points dans le plan cartésien (p. ex.,  $A(1, 3)$  et  $B(3, 7)$ ), lui demander d'écrire les composantes du vecteur  $\overrightarrow{AB}$ , puis recommencer avec deux points de l'espace (p. ex.,  $A(1, -2, 2)$  et  $B(3, 2, 5)$ ).
- Vérifier la réponse de l'élève avec les pairs ou oralement. **(EF)**
- Présenter à l'élève, qui travaille en équipe de quatre, des composantes de vecteurs et des coordonnées de points, puis lui demander de découvrir, par tâtonnements, la façon de calculer les composantes de la somme et de la différence de deux vecteurs, de l'opposé d'un vecteur et du produit d'un vecteur par un scalaire ainsi que de la longueur d'un vecteur ou d'un segment et des coordonnées du milieu d'un segment.
- Inviter chaque équipe à comparer les résultats de ses membres et à circuler pour vérifier leurs réponses. **(EF)**
- Présenter à l'élève, qui travaille en équipe de quatre, les sommets de triangles et de quadrilatères dans le plan cartésien, puis lui demander de vérifier certaines propriétés géométriques à l'aide de l'algèbre des vecteurs comme dans les exemples suivants :
  - Calculer les composantes des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BC}$  et  $\overrightarrow{AC}$  et vérifier que  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$  en partant du triangle dont les sommets sont les points  $A(1, 1)$ ,  $B(3, 5)$  et  $C(8, 2)$ .  
(Note : Du point de vue géométrique, on vérifie la loi du triangle pour ce qui est de l'addition et du point de vue algébrique, on vérifie la loi de Chasles.);
  - Soit le quadrilatère dont les sommets sont les points  $A(1, -1)$ ,  $B(-1, 4)$ ,  $C(2, 6)$  et  $D(7, 3)$ . Utiliser des vecteurs pour montrer que deux des côtés sont parallèles et déterminer la sorte de quadrilatère dont il s'agit.
- Faire une mise en commun des résultats. **(EF)**
- Demander à l'élève de déterminer les composantes d'un vecteur unitaire parallèle à un vecteur donné.
- Corriger ces exercices oralement. **(EF)**
- Présenter à l'élève des questions, telles que celles ci-dessous, pour lui permettre de réfléchir aux concepts présentés.

*Exemples :*

- Décrire les aspects sur lesquels les composantes d'un vecteur et les coordonnées d'un point sont semblables et les aspects sur lesquels elles sont différentes.
- Soit les points  $A(1, 1)$  et  $B(3, 5)$ . Décrire les ressemblances et les différences entre le vecteur  $\overrightarrow{AB}$ , le vecteur  $\overrightarrow{BA}$  et la pente du segment  $AB$ .
- Animer une mise en commun d'idées pour connaître les réponses de l'élève. **(EF)**
- Inviter l'élève à utiliser ses résultats pour déterminer son degré de compréhension des concepts présentés. **(O)**

### *Propriétés algébriques des vecteurs*

- Animer un échange avec le groupe-classe sur l'aspect intuitif qui a été utilisé jusqu'à présent pour découvrir les propriétés algébriques des vecteurs et sur la nécessité d'avoir une assise plus rigoureuse (l'échange prépare un peu l'étude des démonstrations et des processus inductif et déductif de l'unité 3).
- Présenter à l'élève quelques-unes des démonstrations des propriétés algébriques des vecteurs, puis l'inviter à en montrer d'autres.
- Vérifier certaines démonstrations de l'élève en lui demandant de les présenter au tableau. **(EF)**
- Former des équipes de quatre.
- Présenter à l'élève des situations et des problèmes qui portent sur des concepts géométriques.

#### *Exemples :*

- Donner les coordonnées des sommets d'un triangle dans l'espace et demander de le classer selon ses angles et ses côtés.
- Présenter les composantes de deux vecteurs dans l'espace et demander s'ils sont parallèles.
- Présenter les composantes de deux vecteurs dans l'espace et demander s'ils sont orthogonaux. (Expliquer le terme. L'élève peut avoir recours au théorème de Pythagore. On pourra se reporter à cette situation pour motiver l'emploi d'un outil plus efficace, soit le produit scalaire.)
- Demander à l'élève de résoudre les problèmes en utilisant les opérations portant sur les vecteurs et les propriétés algébriques des vecteurs.
- Inviter quelques équipes à présenter leurs solutions sur un transparent aux fins de vérification. **(EF)**

### **Évaluation sommative**

- Voir **Évaluation sommative** de l'activité 1.5.

### **Activités complémentaires/Réinvestissement**

- Demander à l'élève de faire une recherche sur la représentation des points et des vecteurs dans un espace à quatre dimensions.

### **Annexes**

**(espace réservé à l'enseignant ou à l'enseignante pour l'ajout de ses propres annexes)**

## ACTIVITÉ 1.3 (MGA4U)

### Produit scalaire

#### Description

**Durée :** 300 minutes

Dans cette activité, l'élève détermine le produit scalaire de façon algébrique et interprète le résultat de façon géométrique, puis elle ou il résout des problèmes associés à la grandeur des angles.

#### Domaines, attentes et contenus d'apprentissage

**Domaine :** Géométrie

**Attente :** MGA4U-G-A.1

**Contenus d'apprentissage :** MGA4U-G-Opé.5 - 8

#### Notes de planification

- Préparer les exemples et les exercices qui seront utilisés au cours de cette activité.

#### Déroulement de l'activité

##### Mise en situation

- Présenter à l'élève les composantes de deux vecteurs dans le plan cartésien, puis lui demander de déterminer si l'angle entre les deux vecteurs est aigu, droit ou obtus (l'élève aura probablement recours à la loi du cosinus ou au théorème de Pythagore). **(ED)**
- Recommencer avec les composantes de deux vecteurs dans l'espace.
- Animer un échange sur l'activité et suggérer la nécessité d'avoir un outil plus efficace pour déterminer si deux vecteurs forment un angle aigu, droit ou obtus.

##### Expérimentation/Exploration/Manipulation

###### *Aspects géométrique et algébrique*

- Présenter à l'élève le concept du travail en physique et définir le produit scalaire en partant de cette notion, ce qui donnera  $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$ . **(AM)**
- Présenter à l'élève les composantes de deux vecteurs,  $\vec{a} = (2, 1, 5)$  et  $\vec{b} = (4, 2, 2)$ , et lui demander de déterminer le produit scalaire exact des vecteurs et de vérifier son travail auprès de ses pairs. (On peut s'y prendre en utilisant un diagramme et en faisant appel à la loi du

cosinus. On obtient  $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$  et on isole  $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ , tout en calculant les autres longueurs. L'élève n'utilisera probablement pas la notation vectorielle au départ, mais on peut l'encourager à le faire à la fin pour s'y habituer.)

- Présenter à l'élève la même situation avec des composantes générales, soit  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  et  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ , ce qui lui permettra de développer la formule algébrique pour calculer le produit scalaire, soit  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ .
- Animer une mise en commun d'idées, au moyen d'exemples, pour faire ressortir ce qui est important dans l'activité jusqu'à présent, soit la définition du produit scalaire en partant d'une notion géométrique,  $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$  et la formule algébrique  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$  qui permet de faire le calcul rapidement, et mettre l'accent sur le fait que le produit scalaire sert d'abord à déterminer si l'angle entre deux vecteurs est aigu, droit ou obtus.
- Donner à l'élève les composantes de quelques paires de vecteurs et lui demander de déterminer, à l'aide du produit scalaire, si l'angle entre les deux vecteurs est aigu, droit ou obtus.
- Permettre à l'élève de vérifier ses réponses auprès de ses pairs. **(EF)**
- Donner à l'élève les composantes d'un vecteur, puis lui demander de déterminer les composantes de trois vecteurs non parallèles qui sont orthogonaux au vecteur donné.
- Permettre à l'élève de vérifier ses réponses auprès de ses pairs. **(EF)**
- Donner à l'élève les composantes de deux vecteurs, puis lui demander de déterminer la mesure de l'angle entre les deux vecteurs.
- Corriger oralement ou à l'aide des pairs. **(EF)**
- Animer une mise en commun d'idées et construire une carte des concepts au tableau.
- Inviter l'élève à utiliser ses résultats pour déterminer son degré de compréhension des concepts présentés. **(O)**

#### *Liens avec les apprentissages antérieurs et renforcement*

- Présenter à l'élève les coordonnées des sommets de diverses figures géométriques, puis lui demander d'utiliser les vecteurs pour montrer certaines propriétés associées aux angles, tout en communiquant sa démarche clairement.

#### *Exemples :*

- Soit le triangle dont les sommets sont  $A(-4, 2, 2)$ ,  $B(-1, 1, 4)$  et  $C(-3, 3, 1)$ . Montrer que le triangle est rectangle.
- Soit le quadrilatère dont les sommets sont les points  $A(-4, -3, 5)$ ,  $B(-6, 0, 3)$ ,  $C(-1, 3, 2)$  et  $D(3, -3, 6)$ . Montrer que ses diagonales sont perpendiculaires.
- Permettre à l'élève d'échanger son travail avec celui de ses pairs pour en vérifier l'exactitude et la communication. **(EF)**
- Demander à l'élève de déterminer un vecteur qui est orthogonal à deux vecteurs donnés pour introduire un système de deux équations à trois inconnues qu'il faut résoudre, à ce stade-ci, par tâtonnements.
- Animer une mise en commun d'idées, sur la résolution d'un tel système, en éliminant une inconnue et en donnant n'importe quelle valeur à une inconnue pour déterminer les valeurs des deux autres. (Demander à l'élève de déterminer plusieurs solutions et de découvrir ce

qu'elles ont en commun. Cette activité permet à l'élève d'aborder le concept du système de deux équations à trois inconnues dans une situation naturelle qu'elle ou il a créée et de constater qu'il est naturel de trouver une infinité de réponses représentant des vecteurs parallèles entre eux. C'est la raison pour laquelle le produit vectoriel n'est présenté que dans l'unité 2 lorsque l'outil est nécessaire pour déterminer l'équation cartésienne d'un plan.)

- Demander à l'élève de vérifier les propriétés algébriques du produit scalaire à l'aide d'exemples numériques (p. ex.,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ ).
- Demander à l'élève de montrer ces propriétés algébriques en utilisant des composantes générales comme  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  et  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ .
- Demander à l'élève de calculer la composante exacte d'un vecteur  $\vec{a}$  sur un vecteur  $\vec{b}$ , de même que les composantes exactes de la projection de  $\vec{a}$  sur  $\vec{b}$ .
- Demander à l'élève de comparer son travail avec celui de ses pairs pour en vérifier l'exactitude et la communication. **(EF)**
- Assigner à l'élève des exercices et des problèmes de renforcement tels que ceux retrouvés aux pages 47 et 48 du manuel *Algèbre et géométrie (Anderson et al.)*.
- Permettre à l'élève de vérifier son travail auprès de ses pairs ou en effectuant la correction au tableau. **(EF)**

### **Évaluation sommative**

- Voir **Évaluation sommative** de l'activité 1.5.

### **Activités complémentaires/Réinvestissement**

- Présenter à l'élève la notion des angles directeurs d'un vecteur, puis lui demander de déterminer les angles directeurs d'un vecteur donné.

### **Annexes**

**(espace réservé à l'enseignant ou à l'enseignante pour l'ajout de ses propres annexes)**

## ACTIVITÉ 1.4 (MGA4U)

### Vecteurs colinéaires et vecteurs coplanaires

#### Description

**Durée :** 120 minutes

Dans cette activité, l'élève utilise la résolution de problèmes pour développer des outils algébriques qui l'aideront à traiter des notions géométriques portant sur les vecteurs colinéaires et coplanaires. Ces notions seront ensuite exploitées dans l'unité portant sur les droites et les plans.

#### Domaines, attentes et contenus d'apprentissage

**Domaine :** Géométrie

**Attente :** MGA4U-G-A.1

**Contenus d'apprentissage :** MGA4U-G-Opé.6 - 7

#### Notes de planification

- Préparer les exemples, les exercices et les problèmes qui sont présentés dans cette activité, en particulier des plans qui sont quadrillés en partant d'un repère formé par un point et de deux vecteurs non colinéaires.

#### Déroulement de l'activité

##### Mise en situation

- Présenter à l'élève, à l'aide d'un rétroprojecteur, des vecteurs parallèles (p. ex., à l'aide de pailles) et discuter des façons d'exprimer un vecteur en fonction d'un autre.
- Animer une mise en commun d'idées pour trouver une définition algébrique de deux vecteurs parallèles.

##### Expérimentation/Exploration/Manipulation

###### *Vecteurs colinéaires*

- Présenter à l'élève l'expression *vecteurs colinéaires*, qui est employée dans le contexte algébrique, et présenter la définition algébrique qui lui est associée : Deux vecteurs  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  sont colinéaires s'il existe un scalaire  $k$  tel que  $\vec{a} = k\vec{b}$ .
- Présenter à l'élève des paires de vecteurs et lui demander de dire s'ils sont colinéaires et, le cas échéant, d'écrire l'équation qui les lie.

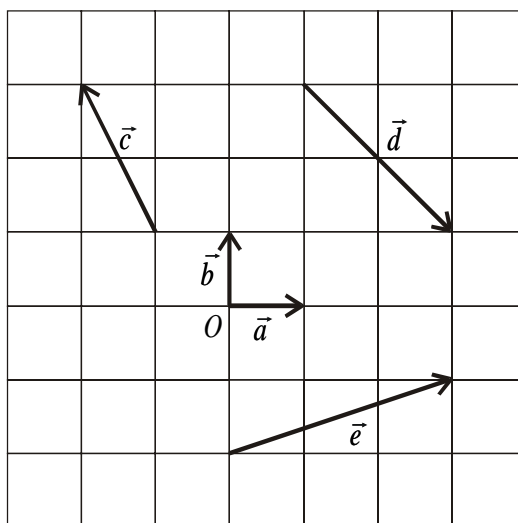
- Présenter à l'élève des énoncés comme ceux ci-après et lui demander de les écrire de façon vectorielle.

*Exemples :*

- Les points  $A, B$  et  $C$  sont alignés. (Rép. Les vecteurs  $\overline{AB}$  et  $\overline{AC}$  sont colinéaires ou il existe un scalaire  $k$  tel que  $\overline{AB} = k\overline{AC}$ .)
- Le quadrilatère  $ABCD$  est un trapèze isocèle dont les bases sont  $AB$  et  $CD$ .  
(Rép. Les vecteurs  $\overline{AB}$  et  $\overline{CD}$  sont colinéaires et les vecteurs  $\overline{AD}$  et  $\overline{BC}$  ont la même longueur ou il existe un scalaire  $k$  tel que  $\overline{AB} = k\overline{CD}$  et  $|\overline{AD}| = |\overline{BC}|$ .)
- Faire une mise en commun d'idées pour comparer et évaluer les réponses de l'élève. **(EF)**

### Vecteurs coplanaires

- Dessiner au tableau deux vecteurs non colinéaires,  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$ , comme les vecteurs ci-contre, et montrer à l'élève que, si on relie ces vecteurs à une même origine  $O$ , on peut alors les utiliser pour quadriller le plan qui contient le point  $O$  et les deux vecteurs. (On dit que  $O, \vec{a}$  et  $\vec{b}$  forment un *repère* du plan. Cette idée est très importante, car elle sera utilisée en résolution de problèmes pour faire des démonstrations et définir l'équation vectorielle d'un plan dans l'espace.)
- Quadriller le plan, comme dans le diagramme ci-dessous, et montrer à l'élève que tous les vecteurs de ce plan peuvent être représentés en fonction de  $\vec{a}$  et de  $\vec{b}$  ( $\vec{e} = 3\vec{a} + \vec{b}$ ,  $\vec{c} = -\vec{a} + 2\vec{b}$  et  $\vec{d} = 2\vec{a} - 2\vec{b}$ ).



- Définir les expressions *combinaison linéaire* et *vecteurs coplanaires*.  
(Un vecteur  $\vec{w}$  est une combinaison linéaire des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  s'il existe des scalaires  $k$  et  $l$  tels que  $\vec{w} = k\vec{u} + l\vec{v}$ . Trois vecteurs  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  et  $\vec{c}$  sont coplanaires si un des vecteurs est une combinaison linéaire des deux autres.)

- Présenter à l'élève des plans, comme le diagramme précédent, dans lesquels il faut exprimer un vecteur comme une combinaison linéaire de deux vecteurs de base.
- Présenter à l'élève les composantes de deux vecteurs,  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$ , puis lui demander de déterminer les composantes de trois vecteurs qui sont coplanaires avec  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$ .
- Présenter à l'élève quelques situations dans lesquelles on donne les composantes de trois vecteurs, puis lui demander de déterminer si les vecteurs sont coplanaires, ce qui entraîne un système de trois équations à deux inconnues et la nécessité de vérifier la solution apparente dans les trois équations.
- Animer une mise en commun d'idées pour revoir et vérifier les situations précédentes et la communication, et mettre l'accent sur le fait que des concepts algébriques sont utilisés pour résoudre des problèmes de géométrie. **(EF)**
- Demander à l'élève, qui travaille avec un ou une partenaire, de donner une définition géométrique et une définition algébrique de *vecteurs colinéaires* et de *vecteurs coplanaires*, puis de comparer les deux.
- Faire une mise en commun des réponses de l'élève et l'inviter à déterminer son degré de compréhension des concepts présentés dans cette activité. **(O)**

#### *Mise en application et résolution de problèmes*

- Présenter à l'élève la situation ci-après (qui a déjà été présentée dans l'activité 1.2), puis lui demander de la résoudre :
  - Soit les points  $A(-1, 3, -1)$ ,  $B(1, 4, -2)$ ,  $C(7, 1, 9)$  et  $D(1, 1, 5)$ . Les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont situés dans un même plan. Déterminer si  $D$  est situé dans le même plan, de manière que  $ABCD$  forme un quadrilatère, ou si  $D$  est situé plus haut ou plus bas que le plan des points  $A$ ,  $B$  et  $C$ .
- Inviter l'élève à vérifier ses réponses auprès de ses pairs ou bien à corriger le travail oralement ou au tableau. **(EF)**
- Présenter à l'élève des applications et des problèmes comme les suivants :

#### *Exemples :*

- Déterminer les coordonnées de quatre points de l'espace qui forment un carré qui n'est pas parallèle à un des plans  $xOy$ ,  $xOz$  ou  $yOz$ . **(EF)**
- Déterminer les coordonnées de quatre points de l'espace qui forment un parallélogramme qui n'est pas parallèle à un des plans  $xOy$ ,  $xOz$  ou  $yOz$ . **(EF)**
- Montrer que les points  $A(-2, 1, 2)$ ,  $B(1, 2, 1)$ ,  $C(-11, 5, 7)$ ,  $D(-1, 6, 3)$  et  $E(-3, 3, 3)$  sont tous situés dans un même plan.
- Permettre à l'élève de vérifier ses réponses auprès de ses pairs. **(EF)**

#### **Évaluation sommative**

- Voir **Évaluation sommative** de l'activité 1.5.

#### **Activités complémentaires/Réinvestissement**

- Faire explorer la notion de dépendance linéaire de vecteurs.

## **Annexes**

**(espace réservé à l'enseignant ou à l'enseignante pour l'ajout de ses propres annexes)**

## ACTIVITÉ 1.5 (MGA4U)

### Résolution de problèmes 1

#### Description

**Durée :** 300 minutes

Dans cette activité, l'élève utilise une variété de stratégies et d'approches pour résoudre des problèmes qui portent sur les fonctions, les coniques, la géométrie plane et les vecteurs, tout en développant des compétences en résolution de problèmes et son habileté à faire la preuve.

#### Domaines, attentes et contenus d'apprentissage

**Domaine :** Démonstrations et résolution de problèmes

**Attentes :** MGA4U-D-A.2 - 3

**Contenus d'apprentissage :** MGA4U-D-Stra.1 - 2 - 4  
MGA4U-D-Prob.3

#### Notes de planification

- Préparer une série de problèmes qui portent sur les mathématiques que l'élève a apprises depuis ses débuts au secondaire, par exemple une dizaine de problèmes dans chacun des domaines suivants : vecteurs, algèbre, fonctions, trigonométrie, coniques, géométrie analytique, géométrie plane, etc. ainsi que des problèmes qui font appel à plus d'un domaine.
- Placer les problèmes de chaque catégorie par ordre croissant de difficulté (ces problèmes seront utilisés tout le long du cours, en particulier dans les activités 2.4, 3.5, 4.5 et 5.5).
- Réserver le local d'informatique.
- Préparer une tâche d'évaluation sommative et une grille d'évaluation adaptée portant sur les activités de l'unité 1.

#### Déroulement de l'activité

##### Mise en situation

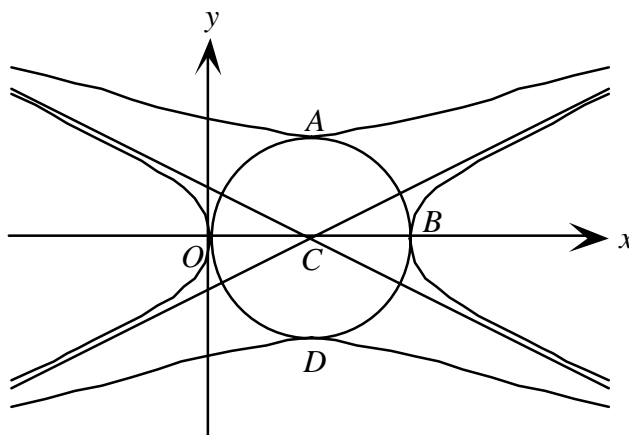
- Présenter à l'élève deux situations, une première qui présente un problème et une deuxième qui présente un exercice.
- Animer un remue-méninges pour comparer les deux situations présentées.

## Expérimentation/Exploration/Manipulation

- Présenter à l'élève une définition d'un problème et animer une discussion par rapport à celle-ci : Un problème est une situation devant laquelle on n'a pas une solution immédiate ou pour laquelle on ne sait pas immédiatement la façon d'obtenir une solution. (L'élève doit comprendre que, lorsqu'elle ou il est placé en situation de résolution de problèmes, sa première réaction devrait être «Je ne sais pas de quelle façon m'y prendre.». De plus, la résolution de problèmes portera sur toutes ses connaissances en mathématiques, pas seulement sur les sujets abordés dans le cours.)

### Exemples de problèmes :

- Déterminer une équation du second degré dont les coefficients sont des entiers et qui a une racine égale à  $3 + 2\sqrt{2}$ . (Ce problème amène l'élève à travailler à rebours. Une racine de ce genre provient de la formule  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ . L'autre racine est donc  $3 - 2\sqrt{2}$ . L'équation a donc la forme  $\left[ x - (3 + 2\sqrt{2}) \right] \left[ x - (3 - 2\sqrt{2}) \right] = 0$ , etc.)
- $f$  est une fonction polynôme du second degré telle que  $f(-1) = 1$ ,  $f(1) = -7$  et  $f(6) = 8$ . Déterminer  $f(5)$ . (On peut partir de  $f(x) = ax^2 + bx + c$  et reporter les valeurs connues dans cette équation pour obtenir un système d'équations. Ce système peut être résolu sans difficulté même si l'élève n'a pas encore appris à le résoudre par la méthode de Gauss.)
- Déterminer la longueur de la corde qui joint les points d'intersection des cercles définis par  $x^2 + y^2 = 9$  et  $x^2 + y^2 - 10x + 1 = 0$ .
- Construire un triangle  $ABC$ , un point  $D$  sur le côté  $BC$  et un point  $E$  sur le côté  $AC$ . Construire les bissectrices des angles  $CBE$  et  $CAD$  ainsi que leur point d'intersection  $F$ . Utiliser *Cybergéomètre* pour découvrir une relation entre les angles  $AEB$ ,  $ADB$  et  $AFB$ . Montrer la relation. (Rép. :  $\angle AEB + \angle ADB = 2\angle AFB$ . Ce problème met en évidence la relation entre le processus inductif et le processus déductif qui sera étudié en détail plus tard. Le processus de découverte est inductif. Il est basé sur des exemples. La preuve, qui est un processus déductif, montre la justesse de la découverte.) (T)
- On a placé un repère cartésien sur le plan d'un jardin botanique de manière que l'origine soit placée au sommet  $O$  d'une des hyperboles.



Les points  $A$ ,  $C$  et  $D$  sont alignés. Le cercle a un diamètre de 10 m. La distance entre les foyers de l'hyperbole de sommets  $A$  et  $D$  est de 18 m. Le centre  $C$  du cercle est aussi le centre des deux hyperboles. Déterminer l'équation canonique de l'hyperbole de sommets  $A$  et  $D$ . (L'élève doit transcrire sur le dessin les renseignements qui sont donnés par écrit.)

- Pour quelles valeurs de  $k$  les points  $A(1, 2, 1)$ ,  $B(-2, -2, 1)$  et  $C(k, 0, -1)$  déterminent-ils un triangle rectangle dont l'hypoténuse est le segment de droite  $AB$ ? (L'élève doit probablement tracer un diagramme et déterminer l'outil, soit le théorème de Pythagore ou le produit scalaire.)
- Demander à l'élève, qui travaille en équipe de quatre, d'élaborer une liste de stratégies de résolution de problèmes.
- Faire une mise en commun d'idées de ces stratégies et les organiser, au tableau, selon les trois premières étapes du processus de résolution de problèmes. Par exemple :

Comprendre le problème

Faire un dessin à mesure qu'on lit.

Faire une liste de ce qui est donné et de ce qui est cherché.

Souligner ou encercler des mots clés.

Poser des questions pour s'assurer qu'on a bien interprété le problème.

Choisir une stratégie

Procéder par tâtonnements.

Résoudre un problème semblable plus simple.

Procéder à rebours.

Se demander si on a déjà résolu un problème semblable.

Appliquer sa stratégie

Distinguer l'information pertinente de l'information superflue.

Évaluer son progrès pour décider si ça va bien ou si on s'achemine vers une impasse.

Au besoin, abandonner sa stratégie et en choisir une autre.

- Remettre à chaque équipe une série de problèmes à résoudre.
- Varier les équipes quotidiennement, au besoin.
- Faire des mises en commun d'idées sur les stratégies employées et comparer ces stratégies quant à leur efficacité ou à leur facilité.
- Demander à l'élève ce qui a suscité l'emploi d'une stratégie plutôt qu'une autre tout en s'assurant qu'elle ou il peut désigner les stratégies utilisées. **(EF)**
- Indiquer à l'élève d'écrire les stratégies utilisées dans son cahier de notes.
- Faire passer à l'élève une tâche d'évaluation sommative qui porte sur les activités de l'unité 1. **(ES)**

### Évaluation sommative

- Présenter à l'élève une tâche d'évaluation sommative comprenant des activités d'envergure qui permettent d'évaluer les opérations sur les vecteurs, à l'aide d'un test papier-crayon et en utilisant une grille d'évaluation adaptée comportant des critères précis de rendement. L'élève doit pouvoir :
  - Connaissance et compréhension
    - effectuer des opérations, sur les vecteurs, de façon algébrique et géométrique;
    - déterminer la projection d'un vecteur sur un autre;

- déterminer l'angle entre deux vecteurs;
- exprimer un vecteur en fonction d'un ou de deux autres vecteurs.
- Réflexion, recherche et résolution de problèmes
  - appliquer différentes stratégies pour résoudre des problèmes liés aux vecteurs.
- Communication
  - communiquer des raisonnements en intégrant l'écriture mathématique et les diagrammes;
  - utiliser correctement la langue, les symboles et le vocabulaire.
- Mise en application
  - modéliser et résoudre divers problèmes à l'aide de vecteurs.

### **Activités complémentaires/Réinvestissement**

- Demander à l'élève, qui travaille en équipe, de trouver un problème qui a une solution inusitée, mais compréhensible, et de le présenter au groupe-classe avec sa solution.

### **Annexes**

**(espace réservé à l'enseignant ou à l'enseignante pour l'ajout de ses propres annexes)**

Annexe MGA4U 1.5.1 : Grille d'évaluation adaptée - Vecteurs

<i>Type d'évaluation</i> : diagnostique <input type="checkbox"/> formative <input type="checkbox"/> sommative <input checked="" type="checkbox"/>				
<i>Compétences et critères</i>	<i>50 - 59 % Niveau 1</i>	<i>60 - 69 % Niveau 2</i>	<i>70 - 79 % Niveau 3</i>	<i>80 - 100 % Niveau 4</i>
<i>Connaissance et compréhension</i>				
L'élève : - exécute des algorithmes, sur les vecteurs, de façon algébrique et géométrique. - détermine la projection d'un vecteur sur un autre vecteur. - détermine l'angle entre deux vecteurs. - exprime un vecteur en fonction d'un ou de deux autres vecteurs.	L'élève démontre une <b>compréhension limitée</b> des concepts et exécute <b>uniquement</b> des algorithmes <b>simples par écrit et à l'aide d'un outil technologique.</b>	L'élève démontre une <b>compréhension partielle</b> des concepts et exécute des algorithmes <b>par écrit, mentalement et à l'aide d'un outil technologique, avec une certaine exactitude.</b>	L'élève démontre une <b>compréhension générale</b> des concepts et exécute des algorithmes <b>par écrit, mentalement et à l'aide d'un outil technologique, avec exactitude.</b>	L'élève démontre une <b>compréhension approfondie</b> des concepts et choisit l'algorithme <b>le plus efficace</b> et l'exécute <b>par écrit, mentalement et à l'aide d'un outil technologique, avec exactitude.</b>
<i>Réflexion, recherche et résolution de problèmes</i>				
L'élève : - applique différentes stratégies pour résoudre des problèmes portant sur les vecteurs.	L'élève applique les étapes d'un processus de résolution de problèmes pour résoudre des problèmes <b>avec une efficacité limitée.</b>	L'élève applique les étapes d'un processus de résolution de problèmes pour résoudre des problèmes <b>avec une certaine efficacité.</b>	L'élève applique les étapes d'un processus de résolution de problèmes pour résoudre des problèmes <b>avec une grande efficacité.</b>	L'élève applique les étapes d'un processus de résolution de problèmes pour résoudre des problèmes <b>avec une très grande efficacité et pose des questions susceptibles d'élargir la réflexion.</b>

<i>Communication</i>				
L'élève : - utilise la langue, les symboles et le vocabulaire propres aux mathématiques. - communique des raisonnements en intégrant l'écriture mathématiques et des diagrammes.	L'élève utilise <b>rarement</b> la langue, les symboles et le vocabulaire propres aux mathématiques <b>avec efficacité</b> et communique <b>avec peu de clarté en donnant des explications limitées</b> .	L'élève utilise <b>parfois</b> la langue, les symboles et le vocabulaire propres aux mathématiques <b>avec efficacité</b> et communique <b>avec une certaine clarté en donnant certaines explications</b> .	L'élève utilise <b>souvent</b> la langue, les symboles et le vocabulaire propres aux mathématiques <b>avec efficacité</b> et communique <b>avec une grande clarté en donnant des explications substantielles</b> .	L'élève utilise <b>toujours ou presque toujours</b> la langue, les symboles et le vocabulaire propres aux mathématiques <b>avec une grande efficacité</b> et communique <b>avec une très grande clarté et concision en donnant des explications complètes</b> .
<i>Mise en application</i>				
L'élève : - modélise et résout divers problèmes à l'aide des vecteurs.	L'élève applique les concepts et les procédés pour résoudre des problèmes <b>simples dans des contextes familiers</b> .	L'élève applique les concepts et les procédés pour résoudre des problèmes <b>d'une certaine complexité dans des contextes familiers</b> .	L'élève applique les concepts et les procédés pour résoudre des problèmes <b>complexes dans des contextes familiers</b> .	L'élève applique les concepts et les procédés pour résoudre des problèmes <b>complexes dans des contextes familiers et peu familiers</b> .
Remarque : L'élève dont le rendement est en deçà du niveau 1 (moins de 50 %) n'a pas satisfait aux attentes pour cette tâche.				



## APERÇU GLOBAL DE L'UNITÉ 2 (MGA4U)

### Droites et plans

#### Description

**Durée :** 26 heures

Cette unité porte sur l'intersection de droites et de plans dans l'espace. L'élève développe les équations de plans et de droites dans l'espace, et détermine l'intersection de ceux-ci en résolvant des systèmes linéaires d'équations à l'aide de matrices. Elle ou il résout des problèmes d'applications basés sur l'intersection de droites et de plans ainsi que sur diverses notions géométriques, puis interprète les solutions obtenues.

#### Domaines, attentes et contenus d'apprentissage

**Domaines :** Géométrie, Démonstrations et résolution de problèmes

**Attentes :** MGA4U-G-A.1 - 2  
MGA4U-D-A.2 - 3

**Contenus d'apprentissage :** MGA4U-G-Opé.5 - 8  
MGA4U-G-DrPl.1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9  
MGA4U-D-Stra.1 - 2 - 4  
MGA4U-D-Prob.3

#### Titres des activités

#### Durée

<b>Activité 2.1 :</b> Équations de droites dans le plan et dans l'espace	180 minutes
<b>Activité 2.2 :</b> Équations de plans et produit vectoriel	480 minutes
<b>Activité 2.3 :</b> Systèmes d'équations et intersections	480 minutes
<b>Activité 2.4 :</b> Résolution de problèmes 2	300 minutes
<b>Activité 2.5 :</b> Tâche d'évaluation sommative - Géométrie dans l'espace	120 minutes

#### Liens

L'enseignant ou l'enseignante prévoit l'établissement de liens entre le contenu du cours et l'animation culturelle (**AC**), la technologie (**T**), les perspectives d'emploi (**PE**) et les autres matières (**AM**) au moment de sa planification des stratégies d'enseignement et d'apprentissage. Des suggestions pratiques sont intégrées dans la section **Déroulement de l'activité** des activités de cette unité.

## Mesures d'adaptation pour répondre aux besoins des élèves

L'enseignant ou l'enseignante doit planifier des mesures d'adaptation pour répondre aux besoins des élèves en difficulté et de celles et ceux qui suivent un cours d'ALF/PDF ainsi que des activités de renforcement et d'enrichissement pour tous les élèves. L'enseignant ou l'enseignante trouvera plusieurs suggestions pratiques dans *La boîte à outils*, p. 11-21.

## Évaluation du rendement de l'élève

L'évaluation fait partie intégrante de la dynamique pédagogique. L'enseignant ou l'enseignante doit donc planifier et élaborer en même temps les activités d'apprentissage et les étapes de l'évaluation en fonction des quatre compétences de base. Des exemples des différents types d'évaluation tels que l'évaluation diagnostique (**ED**), l'évaluation formative (**EF**) et l'évaluation sommative (**ES**) sont suggérés dans la section **Déroulement de l'activité** des activités de cette unité.

## Sécurité

L'enseignant ou l'enseignante veille au respect des règles de sécurité du Ministère et du conseil scolaire.

## Ressources

Dans cette unité, l'enseignant ou l'enseignante utilise les ressources suivantes :

### Ouvrages généraux/de référence/de consultation

ANDERSON, E., *et al.*, *Algèbre et géométrie*, Montréal, Les Éditions de la Chenelière, 1993, 399 p. \*\*\*

CHARRON, Gilles, et Pierre PARENT, *Algèbre linéaire et géométrie vectorielle*, Laval, Éditions Études Vivantes, 1999, 470 p. \*

LADOUCEUR, André, *Mathématiques discrètes*, Montréal, Les Éditions de la Chenelière, 1994, 358 p. \*\*\*

LAFORTUNE, Louise, *Mathématique 536*, Collection Mathophilie, Montréal, Guérin Éditeur, 1998, 465 p. \*

OUELLET, Gilles, *Algèbre linéaire - vecteurs et géométrie*, Sainte-Foy, Les éditions Le Griffon d'argile, 1994, 476 p. \*

## ACTIVITÉ 2.1 (MGA4U)

### Équations de droites dans le plan et dans l'espace

#### Description

**Durée :** 180 minutes

Dans cette activité, l'élève développe les équations vectorielles, paramétriques et symétriques des droites dans le plan et dans l'espace en explorant leur lien avec l'équation cartésienne d'une droite dans le plan. Ces équations permettront de traiter des concepts géométriques de parallélisme et de perpendicularité dans l'espace.

#### Domaines, attentes et contenus d'apprentissage

**Domaine :** Géométrie

**Attente :** MGA4U-G-A.2

**Contenu d'apprentissage :** MGA4U-G-DrPl.1

#### Notes de planification

- S'assurer que chaque élève a accès à une calculatrice à capacité graphique.
- Préparer une feuille sur laquelle on retrouve différentes droites dans un plan pour permettre à l'élève de déterminer les équations vectorielles, paramétriques et symétriques.
- Préparer les exemples et les exercices qui seront utilisés au cours de cette activité.

#### Déroulement de l'activité

##### Mise en situation

- Aider l'élève à visualiser ce qu'est une droite dans l'espace en nouant les deux extrémités d'une corde de part et d'autre de la salle de classe.
- Indiquer à l'élève, sur la droite, trois points  $A$ ,  $B$  et  $C$ , puis lui demander de calculer la  *pente*  des segments  $AB$  et  $AC$ . (L'exercice a pour but de créer un conflit cognitif qui montre qu'on ne peut utiliser un concept comme la pente pour montrer que des vecteurs sont parallèles.)
- Animer une mise en commun d'idées sur l'inutilité de la pente pour décrire la direction d'une droite dans l'espace, d'où la nécessité d'un autre outil. **(ED)**

## Expérimentation/Exploration/Manipulation

### Équations d'une droite dans le plan

- Tracer une droite dans le plan cartésien, puis demander à l'élève de trouver un vecteur parallèle à la droite que l'on appellera *vecteur directeur de la droite*.
- Présenter à l'élève l'équation cartésienne d'une droite, puis lui demander de trouver un vecteur directeur de la droite.
- Montrer à l'élève, au tableau ou sur un transparent, la façon de déterminer une équation vectorielle d'une droite en partant d'un point  $A$  et d'un vecteur directeur  $\vec{m}$  (un point  $P$  est sur la droite s'il existe une valeur de  $t$  telle que  $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\vec{m}$ ).
- Demander à l'élève de déterminer une équation vectorielle de la droite qui passe par deux points donnés, par exemple  $A(2, 1)$  et  $B(3, 4)$ , tout en mettant l'accent sur une bonne communication.

#### Exemple :

- Puisque la droite passe par les points  $A$  et  $B$ , le vecteur  $\overrightarrow{AB} = (1, 3)$  est un vecteur directeur de la droite. L'équation  $(x, y) = (2, 1) + t(1, 3)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , est une équation vectorielle de la droite.
- Corriger par observation ou inviter l'élève à faire la correction à l'aide de ses pairs. **(EF)**
- Montrer à l'élève la façon de transformer l'équation vectorielle en équations paramétriques et en équation symétrique.
- Montrer la façon de tracer la droite, à l'aide de la calculatrice à capacité graphique, en partant des équations paramétriques.
- Présenter à l'élève, en équipe de deux, diverses situations où il faut déterminer une équation vectorielle, des équations paramétriques et une équation symétrique de diverses droites dans le plan, et les tracer sur sa calculatrice à capacité graphique au moyen des équations paramétriques.
- Permettre à l'élève de vérifier son travail en le comparant à celui de ses pairs. **(EF)**
- Demander à l'élève de déterminer si le point  $A(2, 1)$  est situé sur la droite d'équation  $(x, y) = (-2, 5) + t(1, -2)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , et de répondre de deux façons différentes, puis animer une mise en commun d'idées sur les diverses méthodes employées.

#### Exemples de solutions :

- Déterminer s'il existe une valeur de  $t$  pour laquelle  $(2, 1) = (-2, 5) + t(1, -2)$  (méthode qui s'appuie sur un principe algébrique).
- Puisque  $B(-2, 5)$  est sur la droite, déterminer si le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  et le vecteur directeur sont colinéaires (méthode qui s'appuie sur un principe géométrique). **(EF)**

### Liens avec les connaissances antérieures

- Assigner à l'élève des exercices semblables et l'inviter à mettre l'accent sur une bonne communication (toute conclusion doit être justifiée).

#### Exemples :

- Déterminer une équation vectorielle, des équations paramétriques et une équation symétrique de la droite d'équation  $2x + 5y - 6 = 0$ .

- Déterminer une équation vectorielle, des équations paramétriques et une équation symétrique de la droite ayant une abscisse à l'origine de 3 et une ordonnée à l'origine de -4.
- Demander à l'élève de comparer son travail avec celui de ses pairs. **(EF)**
- Présenter à l'élève, qui travaille en équipe de quatre, plusieurs situations de mise en application.

*Exemples :*

- Déterminer, de deux façons différentes, si les droites d'équations  $(x, y) = (2, 1) + s(1, 3)$ ,  $s \in \mathbf{R}$ , et  $(x, y) = (-4, -3) + t(2, 6)$ ,  $t \in \mathbf{R}$ , représentent la même droite.
- Déterminer le point où la droite d'équation  $(x, y) = (5, 2) + t(-3, 1)$ ,  $t \in \mathbf{R}$ , coupe l'axe des  $x$ .
- Déterminer une équation vectorielle de la droite qui est perpendiculaire à la droite d'équation  $(x, y) = (5, 2) + t(-3, 1)$ ,  $t \in \mathbf{R}$ , et qui passe par le point  $P(-2, 2)$ .
- Demander à un ou à une élève de montrer son travail au tableau et revoir la solution quant à la justesse et à la communication. **(EF)**
- Présenter à l'élève diverses équations (vectorielle, paramétriques, symétrique, cartésienne, pente-ordonnée à l'origine) de droites, puis lui demander d'écrire, pour chacune, les renseignements immédiatement donnés en partant de chaque forme d'équation.
- Animer une mise en commun des résultats. **(EF)**

*Équations d'une droite dans l'espace*

- Montrer à l'élève la manière de déterminer une équation vectorielle d'une droite en partant d'un point  $A$  et d'un vecteur directeur  $\vec{m}$  (un point  $P$  est sur la droite s'il existe une valeur de  $t$  telle que  $\vec{OP} = \vec{OA} + t\vec{m}$ ).
- Demander à l'élève de développer les équations paramétriques et symétriques correspondantes.
- Présenter à l'élève, qui travaille en équipe de quatre, des situations de mise en application où il faut déterminer les équations d'une droite ou utiliser des équations pour résoudre un problème.

*Exemples :*

- Écrire une équation vectorielle, des équations paramétriques et des équations symétriques de la droite qui passe par le point  $P(-5, 1, -1)$  et qui a pour vecteur directeur  $\vec{m} = (1, -2, -3)$ , puis utiliser chaque sorte d'équations pour déterminer si le point  $Q(-8, 7, 7)$  est situé sur cette droite.
- Déterminer, de deux façons différentes, si les équations  $\frac{x-5}{2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z+1}{-5}$  et  $\frac{x+1}{-4} = \frac{y-1}{-6} = \frac{z+3}{10}$  représentent la même droite.
- Déterminer les points où la droite d'équations  $\frac{x-5}{2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z+1}{-5}$  traverse les plans  $xOy$ ,  $xOz$  et  $yOz$ .
- Demander à l'élève de vérifier son travail en l'échangeant avec celui de ses pairs. **(EF)**

### **Évaluation sommative**

- Voir **Évaluation sommative** à l'activité 2.5.

### **Activités complémentaires/Réinvestissement**

- Demander à l'élève de faire une recherche sur la façon de calculer la distance entre un point et une droite dans l'espace.

### **Annexes**

**(espace réservé à l'enseignant ou à l'enseignante pour l'ajout de ses propres annexes)**

## ACTIVITÉ 2.2 (MGA4U)

### Équations de plans et produit vectoriel

#### Description

**Durée :** 480 minutes

Dans cette activité, l'élève détermine, puis interprète le produit vectoriel de deux vecteurs et détermine par exploration les équations vectorielles, paramétriques et cartésiennes d'un plan dans l'espace. Ces équations serviront à la résolution de problèmes de géométrie dans l'espace.

#### Domaines, attentes et contenus d'apprentissage

**Domaine :** Géométrie

**Attentes :** MGA4U-G-A.1 - 2

**Contenus d'apprentissage :** MGA4U-G-Opé.5 - 8  
MGA4U-G-DrPl.3

#### Notes de planification

- Préparer un plateau recouvert de pâte à modeler et des pailles pour faire la mise en situation.
- Préparer les exercices et les exemples qui seront utilisés au cours de cette activité.

#### Déroulement de l'activité

##### Mise en situation

- Présenter au groupe-classe un plateau recouvert d'environ 2 cm de pâte à modeler dans lequel on a planté quatre ou cinq pailles en plastique, pointant dans diverses directions, pour représenter des vecteurs.
- Déplacer un vecteur (une paille), tout en maintenant sa direction, pour qu'il ait la même origine qu'un autre vecteur et placer un carton contre les deux vecteurs pour montrer que deux vecteurs non colinéaires et un point définissent un plan.
- Recommencer avec un autre vecteur.

##### Expérimentation/Exploration/Manipulation

###### *Équations vectorielles et paramétriques de plans dans l'espace*

- Présenter à l'élève un quadrillage d'un plan par un repère, c'est-à-dire un point et deux vecteurs non colinéaires du plan, comme celui de l'activité 1.4, puis lui demander de

représenter divers vecteurs du plan comme combinaisons linéaires des deux vecteurs du repère.

- Présenter à l'élève un argument qui définit l'équation vectorielle et les équations paramétriques d'un plan qui contient un point  $A$  et deux vecteurs directeurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  (un point  $P$  est sur le plan s'il existe des valeurs de  $s$  et de  $t$  pour que  $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\vec{u} + s\vec{v}$ ), tout en se reportant au rôle de  $A$  et des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  comme repère du plan.
- Présenter à l'élève, qui travaille en équipe de quatre, des situations de mise en application où il faut déterminer des équations de plans ou utiliser des équations pour résoudre des problèmes.

*Exemples :*

- Déterminer une équation vectorielle du plan qui contient les points  $A(1, 0, -3)$ ,  $B(2, -3, 1)$  et  $C(3, 5, -3)$  et utiliser cette équation pour déterminer si le point  $Q(5, 7, 1)$  est situé dans ce plan.
- Soit les droites définies par  $(x, y, z) = (2, 4, 1) + t(3, -1, 1)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , et  $(x, y, z) = (1, 4, 4) + s(-6, 2, -2)$ ,  $s \in \mathbb{R}$ . Montrer que ces droites sont parallèles et distinctes et déterminer une équation vectorielle du plan qui les contient.
- Inviter un ou une élève à présenter des solutions sur un transparent et les évaluer quant à leur justesse et à la clarté de la présentation. **(EF)**
- Présenter à l'élève l'équation vectorielle de deux plans et lui demander si elles représentent le même plan (conclure qu'il faut un outil plus efficace qu'une équation vectorielle pour traiter du plan).

*Produit vectoriel de vecteurs*

- Définir le produit vectoriel de deux vecteurs (p. ex., *Algèbre et géométrie*, Anderson *et al.* ou *Stewart et al.*) et faire découvrir à l'élève la façon de le calculer.
- Assigner à l'élève quelques exercices sur le calcul du produit vectoriel de deux vecteurs, puis l'inviter à vérifier son calcul en s'assurant que le produit est bien orthogonal aux deux vecteurs donnés. **(EF)**
- Demander à l'élève de montrer les principales propriétés algébriques du produit vectoriel.
- Assigner à l'élève des exercices, tels :

*Exemples :*

- Soit les vecteurs  $\vec{a} = (2, -3, 1)$ ,  $\vec{b} = (-3, 1, 2)$  et  $\vec{c} = (1, 2, 3)$ . Déterminer si  $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ .
- Voir *Algèbre et géométrie*, Anderson *et al.*, page 87, numéros 3 et 7.
- Animer une mise en commun d'idées pour s'assurer de la validité des résultats. **(EF)**
- Présenter et expliquer à l'élève l'outil ci-après qui sert à déterminer si trois vecteurs sont coplanaires : Trois vecteurs  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  et  $\vec{c}$  sont coplanaires si  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$  (double produit).
- Demander à l'élève de créer trois vecteurs coplanaires et trois vecteurs non coplanaires, puis de les donner à un ou à une autre élève qui doit les vérifier au moyen du double produit. **(EF)**

### Équation cartésienne d'un plan

- Développer l'équation cartésienne d'un plan à l'aide d'un exemple numérique.
- Demander à l'élève de développer l'équation cartésienne d'un plan à l'aide d'un exemple numérique et de vérifier sa réponse. **(EF)**
- Développer l'équation cartésienne d'un plan en partant d'une situation générale.
- Présenter à l'élève une situation, comme celle ci-après, puis lui demander de la résoudre en mettant l'accent sur la communication :  
Déterminer l'équation cartésienne du plan qui contient les points  $A(2, 4, -1)$ ,  $B(3, 0, 2)$  et  $C(-1, -2, 5)$ .

*Exemple d'une solution avec une communication et des justifications appropriées :*

Puisque les points sont dans le plan,  $\overline{AB} = (1, -4, 3)$  et  $\overline{AC} = (-3, -6, 6)$  sont des vecteurs directeurs du plan.

$$\begin{aligned}\overline{AB} \times \overline{AC} &= (-6, -15, -18) \\ &= -3(2, 5, 6)\end{aligned}$$

Puisque ce vecteur est orthogonal au plan, on choisit le vecteur normal  $\vec{n} = (2, 5, 6)$ .

Donc l'équation du plan a la forme  $2x + 5y + 6z + D = 0$ .

Puisque  $A$  est dans le plan,  $2(2) + 5(4) + 6(-1) + D = 0$ , d'où  $D = -18$ .

L'équation cartésienne du plan est  $2x + 5y + 6z - 18 = 0$ .

- Présenter à l'élève la solution sur un transparent. **(EF)**

### Mise en application et résolution de problèmes

- Présenter à l'élève, qui travaille en équipe de trois ou de quatre, des situations de mise en application et de résolution de problèmes (voir *Algèbre et géométrie*, Anderson *et al.*, pages 118 et 119). **(EF)**
- Inviter un ou une élève à venir transcrire et à présenter sa solution au tableau ou sur un transparent.
- Montrer à l'élève, sur un transparent, des solutions qui contiennent des erreurs, des omissions ou une mauvaise communication, puis lui demander de corriger les situations. **(EF)**
- Demander à l'élève de présenter les corrections suggérées et d'en discuter pour lui faire prendre conscience de ses acquis. **(O)**

### Évaluation sommative

Voir **Évaluation sommative** à l'activité 2.5.

### Activités complémentaires/Réinvestissement

- Présenter à l'élève une équation à plus de trois inconnues, puis lui demander d'indiquer des situations qui font appel à de telles équations.

### Annexes

(espace réservé à l'enseignant ou à l'enseignante pour l'ajout de ses propres annexes)

## ACTIVITÉ 2.3 (MGA4U)

### Systemes d'équations et intersections

#### Description

**Durée :** 480 minutes

Dans cette activité, l'élève détermine l'intersection de droites, d'une droite et d'un plan, puis résout des systèmes linéaires par la méthode de Gauss. Elle ou il résout des problèmes qui portent sur l'intersection de plans, puis en donne une interprétation géométrique.

#### Domaines, attentes et contenus d'apprentissage

**Domaine :** Géométrie

**Attente :** MGA4U-G-A.2

**Contenus d'apprentissage :** MGA4U-G-DrPl.2 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9

#### Notes de planification

- Préparer les exemples et les exercices qui seront utilisés au cours de cette activité.

#### Déroulement de l'activité

##### Mise en situation

- Présenter à l'élève deux droites (p. ex., des pailles) et lui demander d'indiquer les quatre différentes possibilités d'intersection (parallèle confondue, parallèle distincte, gauche, sécante). **(ED)**

##### Expérimentation/Exploration/Manipulation

###### *Intersection de droites*

- Présenter à l'élève les équations paramétriques de deux droites non parallèles, puis lui demander leur interprétation géométrique possible (elles sont sécantes ou gauches).
- Montrer à l'élève la façon de déterminer leur intersection.
- Présenter à l'élève les équations paramétriques de deux droites parallèles, puis lui demander leur interprétation géométrique (elles sont parallèles distinctes ou confondues) et la façon de la déterminer.
- Animer une mise en commun d'idées pour vérifier le travail de l'élève. **(EF)**

- Présenter à l'élève les équations d'une droite et l'équation cartésienne d'un plan, puis lui demander de déterminer leur point d'intersection.
- Animer une mise en commun d'idées pour vérifier les réponses de l'élève. **(EF)**

#### *Intersection de deux plans*

- Présenter à l'élève deux plans (p. ex., feuilles de papier ou cartons) et l'inviter à discuter des trois possibilités d'intersections (parallèle distincte, parallèle confondue, sécante).
- Présenter à l'élève les équations de deux plans, puis lui demander de déterminer l'équation de la droite d'intersection par la méthode d'élimination.
- Présenter à l'élève quelques exercices qui lui permettent de mettre en application les trois différentes possibilités d'intersection de deux plans.
- Animer une mise en commun d'idées pour vérifier les résultats de l'élève. **(EF)**
- Montrer à l'élève la méthode de Gauss avec un système de deux équations à deux inconnues et lui présenter, en même temps, ce qui arrive aux équations correspondantes.
- Présenter à l'élève quelques systèmes de deux équations à deux inconnues qu'il faut résoudre par la méthode de Gauss et vérifier le résultat. **(EF)**
- Montrer à l'élève la façon d'utiliser la méthode de Gauss pour déterminer la droite d'intersection de deux plans.
- Présenter à l'élève quelques exercices où il faut déterminer la droite d'intersection de deux plans et vérifier ses solutions. **(EF)**

#### *Intersection de trois plans*

- Présenter à l'élève trois plans (p. ex., feuilles de papier ou cartons) et l'inviter à discuter des possibilités d'intersection des plans.
- Montrer à l'élève la méthode de Gauss pour résoudre un système de trois équations à trois inconnues qui n'admet aucune solution, qui admet une seule solution, puis qui admet une infinité de solutions et en donner une interprétation géométrique.
- Montrer à l'élève quelques matrices qui ont été réduites par la méthode de Gauss, tout en incluant toutes les possibilités, puis lui demander d'indiquer les solutions et de donner, pour chaque cas, une interprétation géométrique.
- Faire une mise en commun d'idées pour vérifier la compréhension de l'élève. **(EF)**
- Présenter à l'élève des exercices où il faut déterminer l'intersection de trois plans par la méthode de Gauss et, dans le cas d'une droite d'intersection, donner trois solutions particulières.
- Demander à l'élève de préparer un tableau qui indique, pour ce qui est de l'intersection de trois plans, les différentes possibilités de solutions et leur interprétation géométrique.
- Remettre à l'élève un exercice qui porte sur l'intersection de trois plans.
- Inviter l'élève à faire la correction de cet exercice avec l'aide de ses pairs. **(EF)**

#### *Application des concepts*

- Présenter à l'élève, qui travaille en équipe de quatre, des situations de mise en application qui concernent l'intersection de deux ou de trois plans, l'intersection de deux droites ou l'intersection d'une droite et d'un plan, puis lui demander de porter une attention particulière à la communication.

*Exemples :*

- Déterminer les points où la droite d'intersection des plans d'équations  $2x + 2y + z - 8 = 0$  et  $x - 2y + 2z - 22 = 0$  coupe les plans  $xOy$ ,  $xOz$  et  $yOz$ .
- Montrer que les droites définies par  $(x, y, z) = (1, 2, 8) + s(1, -1, 3)$ ,  $s \in \mathbf{R}$ , et  $(x, y, z) = (-4, 1, 1) + t(-1, -2, 1)$ ,  $t \in \mathbf{R}$ , sont sécantes et déterminer l'équation cartésienne du plan qui les contient.
- Voir *Algèbre et géométrie*, Anderson *et al.*, page 135, numéros 9, 10; page 155, numéros 4, 5, 6; page 163, numéro 2.
- Demander à l'élève de faire vérifier son travail par ses pairs. **(EF)**
- Présenter une série de concepts à l'élève, qui travaille en équipe de quatre, puis lui demander de créer une carte de concepts.
- Animer une mise en commun d'idées pour comparer les cartes de concepts des équipes. **(EF)**

### **Évaluation sommative**

- Voir **Évaluation sommative** à l'activité 2.5.

### **Activités complémentaires/Réinvestissement**

- Présenter à l'élève des systèmes d'équations à plus de trois inconnues, puis lui demander de les résoudre par la méthode de Gauss.
- Présenter à l'élève des situations où de tels systèmes sont employés (p. ex., en économie).

### **Annexes**

**(espace réservé à l'enseignant ou à l'enseignante pour l'ajout de ses propres annexes)**

## ACTIVITÉ 2.4 (MGA4U)

### Résolution de problèmes 2

#### Description

**Durée :** 300 minutes

Dans cette activité, l'élève résout, à l'aide de diverses stratégies, des problèmes, y compris certains qui portent sur la géométrie en trois dimensions, les systèmes d'équations spéciaux et les sujets abordés dans l'activité 1.5.

#### Domaines, attentes et contenus d'apprentissage

**Domaines :** Géométrie, Démonstrations et résolution de problèmes

**Attentes :** MGA4U-G-A.2  
MGA4U-D-A.2 - 3

**Contenus d'apprentissage :** MGA4U-G-DrPl.9  
MGA4U-D-Stra.1 - 2 - 4  
MGA4U-D-Prob.3

#### Notes de planification

- Se procurer diverses longueurs de corde épaisse, préférablement de couleurs différentes, pour illustrer des droites dans l'espace.
- Préparer une série de problèmes qui portent sur la géométrie dans l'espace.
- S'assurer d'avoir à la portée de la main la série de problèmes préparés lors de l'activité 1.5 et qui doit servir à la résolution de problèmes tout le long du cours.

#### Déroulement de l'activité

##### Mise en situation

- Représenter une droite dans l'espace en nouant les deux extrémités d'une corde de part et d'autre de la salle de classe, puis présenter à l'élève l'équation vectorielle de la droite représentée par cette corde et les coordonnées d'un point  $A$ , situé à l'extérieur de cette droite, tout en indiquant que l'on veut déterminer la distance du point  $A$  à la droite.
- Animer une mise en commun d'idées de manière à bien définir ce qu'on entend par la distance (c'est-à-dire la distance la plus courte) et utiliser une autre corde, plus courte et d'une autre couleur, qui sera attachée à la première et qui sera liée au point  $A$  (un objet dans la salle de classe), puis faire glisser cette corde jusqu'à ce qu'elle soit perpendiculaire à la

première, tout en demeurant liée au point (cette démonstration fera ressortir la notion du calcul de la distance du point  $A$  à la droite; on cherche un point  $B$  sur la corde de manière que le vecteur  $\overline{AB}$  soit orthogonal à la droite, ce qui donnera une équation à une inconnue).

- Inviter l'élève à terminer la résolution du problème et à comparer sa réponse à celle de ses pairs. **(ED)**
- Placer deux cordes qui traversent la salle de classe, en les fixant à deux endroits, pour représenter deux droites gauches, puis présenter les équations des deux droites représentées par ces cordes, tout en indiquant à l'élève qu'il faut déterminer la distance entre les droites.
- Animer une mise en commun d'idées de manière à bien définir ce qu'on entend par la distance entre les droites et utiliser une troisième corde, de couleur différente, qui sera attachée à une droite, et qui peut être glissée jusqu'à ce qu'elle soit perpendiculaire aux deux droites (cette démonstration fait ressortir l'idée que l'on cherche un point  $A$  sur la première droite et un point  $B$  sur la deuxième, de manière que le vecteur  $\overline{AB}$  soit orthogonal à chaque droite, ce qui donnera un système de deux équations à deux inconnues).

### Expérimentation/Exploration/Manipulation

- Présenter à l'élève, qui travaille en équipe de quatre, des problèmes variés qui portent sur la géométrie dans l'espace, en particulier sur l'intersection de droites et de plans, et suggérer un nombre de problèmes à résoudre chaque jour, tout en mettant l'accent sur la présentation, la justification et la communication.

*Exemples :*

- Déterminer la distance du point  $A(10, 3, -1)$  au plan d'équation  $3x - y - 2z - 1 = 0$ .
- Déterminer la distance du point  $P(2, 3, -1)$  à la droite d'intersection des plans définis par  $2x - 2y + z + 3 = 0$  et  $3x - 2y + 2z + 17 = 0$ .
- Déterminer les coordonnées du point  $Q$ , symétrique du point  $P(3, -4, -6)$  par rapport au plan d'équation  $x - y - 4z - 13 = 0$ .
- Déterminer les points où le plan d'équation  $2x - 3y - 4z - 24 = 0$  coupe les axes des coordonnées.
- Déterminer l'équation cartésienne du plan qui passe par la droite d'intersection des plans d'équations  $2x + y - z + 1 = 0$  et  $x + y + 2z + 1 = 0$  et qui est parallèle au segment qui joint les points  $A(2, 5, -3)$  et  $B(3, -2, 2)$ .
- Animer des mises en commun d'idées, au besoin. **(EF)**
- Présenter à l'élève, travaillant toujours en équipe, des problèmes qui portent sur différents aspects mathématiques.

*Exemples :*

- Déterminer les valeurs de  $x$ ,  $y$  et  $z$  telles que  $xy = 90$ ,  $yz = 180$  et  $zx = 72$ .
- Utiliser la loi des sinus pour montrer que la bissectrice d'un angle dans un triangle coupe le côté opposé dans un rapport qui est égal au rapport des longueurs des deux autres côtés.
- Déterminer la longueur exacte d'un côté d'un triangle équilatéral dont l'aire est égale à  $6\sqrt{3}$ .
- Résoudre l'équation  $(x^2 - 5x + 5)^{x^2 - 9x + 20} = 1$ .

- Déterminer les valeurs de  $k$  pour lesquelles l'équation  $(k + 2)x^2 - kx - 2 = 0$  admet deux racines réelles égales.
- Déterminer la valeur de  $x$  pour laquelle
 
$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2001^2}\right) \left(1 - \frac{1}{2002^2}\right) = \frac{x}{2002}.$$
- Un triangle, situé dans le premier quadrant, est borné par l'axe des  $x$ , l'axe des  $y$  et la droite d'équation  $y = -3x + 3a$ . Déterminer la valeur de  $a$  si le triangle a une aire de 96 unités carrées.
- Présenter à l'élève un problème de géométrie où il faut utiliser *Cybergéomètre* pour découvrir une propriété géométrique, puis la montrer. **(T)**
- Faire des mises en commun d'idées sur les stratégies employées, comparer ces stratégies quant à leur efficacité ou à leur facilité, demander à l'élève ce qui l'a amené à les choisir, tout en s'assurant qu'elle ou il peut les relever, puis l'inviter à les prendre en note dans son cahier. **(EF)**
- Inviter l'élève à inventorier les stratégies maîtrisées et celles qui requièrent une amélioration. **(O)**

### Évaluation sommative

- Voir **Évaluation sommative** à l'activité 2.5.

### Activités complémentaires/Réinvestissement

- Présenter à l'élève des problèmes tirés de divers concours qui présentent un degré élevé de difficulté.

### Annexes

(espace réservé à l'enseignant ou à l'enseignante pour l'ajout de ses propres annexes)

## ACTIVITÉ 2.5 (MGA4U)

### Tâche d'évaluation sommative - Géométrie dans l'espace

#### Description

**Durée :** 120 minutes

Cette tâche d'évaluation place l'élève dans des situations de mise en application et de résolution de problèmes qui mobilisent ses connaissances et son savoir-faire en géométrie de l'espace pour évaluer les attentes en fonction des compétences.

#### Domaines, attentes et contenus d'apprentissage

**Domaine :** Géométrie

**Attentes :** MGA4U-G-A.1 - 2

**Contenus d'apprentissage :** MGA4U-G-DrPl.1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9

#### Notes de planification

- Prévoir du temps pour faire un exercice de révision. Environ 30 minutes de révision sont incluses dans la durée prévue pour la tâche d'évaluation.

#### Déroulement

- Présenter à l'élève la tâche d'évaluation sommative.
- Préciser à l'élève les attentes et les contenus d'apprentissage visés par cette tâche, puis établir le lien avec les activités de l'unité 2 et la grille d'évaluation adaptée.
- Présenter à l'élève les éléments sur lesquels portent les étapes de la tâche d'évaluation et les habiletés auxquelles elle fait appel. L'élève doit pouvoir :
  - Connaissance et compréhension
    - démontrer une connaissance et une compréhension des concepts de droites et de plans ainsi que de leurs caractéristiques géométriques et algébriques;
    - exécuter les algorithmes avec exactitude.
  - Recherche, réflexion et résolution de problèmes
    - appliquer les étapes d'un processus de résolution de problèmes en présentant les données au moyen de concepts géométriques et algébriques appropriés.
  - Communication
    - utiliser la langue, les symboles, les diagrammes et les conventions propres aux mathématiques;

- communiquer et justifier les étapes de son raisonnement.
- Mise en application
  - utiliser les concepts et les procédures appropriés aux situations.
- Distribuer le cahier de l'élève et la grille d'évaluation adaptée.
- Demander à l'élève de répondre aux questions.

## **Annexes**

**(espace réservé à l'enseignant ou à l'enseignante pour l'ajout de ses propres annexes)**

Annexe MGA4U 2.5.1 : Grille d'évaluation adaptée - Géométrie dans l'espace

Annexe MGA4U 2.5.2 : Cahier de l'élève - Géométrie dans l'espace

<i>Type d'évaluation</i> : diagnostique <input type="checkbox"/> formative <input type="checkbox"/> sommative <input checked="" type="checkbox"/>				
<i>Compétences et critères</i>	<b>50 - 59 % Niveau 1</b>	<b>60 - 69 % Niveau 2</b>	<b>70 - 79 % Niveau 3</b>	<b>80 - 100 % Niveau 4</b>
<b><i>Connaissance et compréhension</i></b>				
L'élève : - démontre une compréhension des concepts de droites et de plans ainsi que de leurs caractéristiques géométriques et algébriques (vecteurs directeurs, équations, vecteur normal, parallélisme, perpendicularité, intersection). - exécute des algorithmes (méthode de Gauss, détermination d'équations, intersection, longueurs, produit vectoriel).	L'élève démontre une <b>compréhension limitée</b> des concepts en les utilisant <b>rarement</b> correctement et en établissant <b>rarement</b> des relations entre les concepts, et exécute des algorithmes <b>avec peu d'exactitude en commettant un grand nombre d'erreurs</b> .	L'élève démontre une <b>compréhension partielle</b> des concepts en les utilisant <b>parfois</b> correctement et en établissant <b>parfois</b> des relations entre les concepts, et exécute des algorithmes <b>avec une certaine exactitude en réussissant ses calculs environ la moitié du temps</b> .	L'élève démontre une <b>compréhension générale</b> des concepts en les utilisant <b>souvent</b> correctement et en établissant <b>souvent</b> des relations entre les concepts, et exécute des algorithmes <b>avec exactitude environ les trois quarts du temps</b> .	L'élève démontre une <b>compréhension approfondie</b> des concepts en les utilisant <b>toujours ou presque toujours</b> correctement et en établissant <b>toujours ou presque toujours</b> des relations entre les concepts, et exécute des algorithmes <b>toujours ou presque toujours avec exactitude</b> .
<b><i>Réflexion, recherche et résolution de problèmes</i></b>				
L'élève : - applique des étapes d'un processus de résolution de problèmes en représentant les données du problème au moyen de concepts géométriques et algébriques appropriés.	L'élève utilise une stratégie <b>non convenable et s'arrête en chemin</b> , tout en montrant une compréhension de certains concepts.	L'élève utilise une stratégie <b>non convenable</b> (p. ex., a mal interprété l'utilisation des points sur les axes) <b>et poursuit son travail jusqu'à la fin</b> .	L'élève utilise une stratégie <b>convenable, tout en commettant une erreur majeure</b> (p. ex., en choisissant des points particuliers sur les axes).	L'élève utilise une stratégie <b>convenable</b> et obtient une réponse, <b>en commettant rarement des erreurs mineures de calcul ou de copiage de données</b> .

<i>Communication</i>				
L'élève : - utilise la langue, les symboles, les diagrammes et les conventions propres aux mathématiques. - communique et justifie des étapes de son raisonnement.	L'élève utilise <b>rarement</b> la langue, les symboles, les diagrammes et les conventions propres aux mathématiques, et présente et justifie <b>rarement</b> les étapes de son raisonnement de façon cohérente.	L'élève utilise <b>parfois</b> la langue, les symboles, les diagrammes et les conventions propres aux mathématiques, et présente et justifie <b>parfois</b> les étapes de son raisonnement de façon cohérente.	L'élève utilise <b>souvent</b> la langue, les symboles, les diagrammes et les conventions propres aux mathématiques, et présente et justifie <b>souvent</b> les étapes de son raisonnement de façon cohérente.	L'élève utilise <b>toujours ou presque toujours</b> la langue, les symboles, les diagrammes et les conventions propres aux mathématiques, et présente et justifie <b>toujours ou presque toujours</b> les étapes de son raisonnement de façon cohérente.
<i>Mise en application</i>				
L'élève : - utilise des concepts et des procédures appropriés pour résoudre les problèmes donnés.	L'élève utilise <b>rarement</b> les concepts et les procédures appropriés <b>en répondant à peu de questions et en faisant beaucoup d'erreurs.</b>	L'élève utilise <b>parfois</b> les concepts et les procédures appropriés <b>en répondant à environ la moitié des questions et en faisant beaucoup d'erreurs.</b>	L'élève utilise <b>souvent</b> les concepts et les procédures appropriés <b>en répondant à la plupart des questions et en faisant peu d'erreurs qui auraient pu être évitées par vérification.</b>	L'élève utilise <b>toujours ou presque toujours</b> les concepts et les procédures appropriés <b>en répondant à toutes les questions et en faisant très peu d'erreurs de calcul.</b>
Remarque : L'élève dont le rendement est en deçà du niveau 1 (moins de 50 %) n'a pas satisfait aux attentes pour cette tâche.				

## Géométrie dans l'espace

Durée : 120 minutes

1. Les matrices ci-dessous représentent des systèmes d'équations qui ont été résolus pour déterminer l'intersection de trois plans. Écrire les solutions et les interpréter de façon géométrique.

a)

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

b)

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array} \right]$$

c)

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

2. a) Montrer que les plans définis par les équations  $2x + 2y + 3z - 5 = 0$ ,  $x + 4y - 3z + 5 = 0$  et  $x - 2y + 6z - 10 = 0$  se coupent le long d'une même droite.  
 b) Déterminer l'équation vectorielle du plan qui contient la droite  $x = 3 + 4t$ ,  $y = 8 - 2t$ ,  $z = 15 + t$  et qui est parallèle à l'axe des  $z$ .  
 c) Déterminer l'intersection du plan  $2x + 2y + 3z - 5 = 0$  et de la droite  $(x, y, z) = (-1, 7, -3) + t(2, -3, 1)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

3. a) Montrer que les points  $A(1, -2, 1)$ ,  $B(4, 0, 1)$ ,  $C(3, -6, -3)$  et  $D(2, 2, 3)$  ne sont pas situés dans un même plan. Justifier la réponse.  
 b) Déterminer l'équation cartésienne du plan qui passe par les points  $A$ ,  $B$  et  $C$ .  
 c) Écrire l'équation symétrique de la droite qui passe par les points  $A$  et  $D$ .

4. Montrer que les droites d'équations  $(x, y, z) = (1, 0, -3) + t(3, 5, 4)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , et

$$\frac{x}{1} = \frac{y+9}{-2} = \frac{z+1}{3} \text{ sont sécantes.}$$

5. Déterminer l'équation cartésienne du plan qui coupe les parties positives des trois axes à une même distance de l'origine et qui contient le point  $P(4, 3, 2)$ .

## APERÇU GLOBAL DE L'UNITÉ 3 (MGA4U)

### Démonstrations

#### Description

**Durée :** 22 heures

Cette unité porte sur la démonstration et la résolution de problèmes. L'élève établit des propriétés de figures planes à l'aide de la géométrie analytique, de démonstrations algébriques et de méthodes vectorielles pour développer ses compétences en résolution de problèmes. Elle ou il utilise une variété de stratégies et d'approches pour résoudre des problèmes tout en justifiant clairement les étapes de son raisonnement.

#### Domaines, attentes et contenus d'apprentissage

**Domaine :** Démonstrations et résolution de problèmes

**Attentes :** MGA4U-D-A.1 - 2 - 3

**Contenus d'apprentissage :** MGA4U-D-Dém.1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6  
MGA4U-D-Stra.1 - 2 - 3 - 4  
MGA4U-D-Prob.1 - 2 - 3

#### Titres des activités

#### Durée

<b>Activité 3.1 :</b> Propositions, implications et réciproques	120 minutes
<b>Activité 3.2 :</b> Preuve indirecte et l'énoncé <i>si et seulement si</i>	120 minutes
<b>Activité 3.3 :</b> Démonstrations par déduction	540 minutes
<b>Activité 3.4 :</b> Démonstrations au moyen de la géométrie analytique et des vecteurs	240 minutes
<b>Activité 3.5 :</b> Résolution de problèmes 3	300 minutes

#### Liens

L'enseignant ou l'enseignante prévoit l'établissement de liens entre le contenu du cours et l'animation culturelle (**AC**), la technologie (**T**), les perspectives d'emploi (**PE**) et les autres matières (**AM**) au moment de sa planification des stratégies d'enseignement et d'apprentissage. Des suggestions pratiques sont intégrées dans la section **Déroulement de l'activité** des activités de cette unité.

## Mesures d'adaptation pour répondre aux besoins des élèves

L'enseignant ou l'enseignante doit planifier des mesures d'adaptation pour répondre aux besoins des élèves en difficulté et de celles et ceux qui suivent un cours d'ALF/PDF ainsi que des activités de renforcement et d'enrichissement pour tous les élèves. L'enseignant ou l'enseignante trouvera plusieurs suggestions pratiques dans *La boîte à outils*, p. 11-21.

## Évaluation du rendement de l'élève

L'évaluation fait partie intégrante de la dynamique pédagogique. L'enseignant ou l'enseignante doit donc planifier et élaborer en même temps les activités d'apprentissage et les étapes de l'évaluation en fonction des quatre compétences de base. Des exemples des différents types d'évaluation tels que l'évaluation diagnostique (**ED**), l'évaluation formative (**EF**) et l'évaluation sommative (**ES**) sont suggérés dans la section **Déroulement de l'activité** des activités de cette unité.

## Sécurité

L'enseignant ou l'enseignante veille au respect des règles de sécurité du Ministère et du conseil scolaire.

## Ressources

Dans cette unité, l'enseignant ou l'enseignante utilise les ressources suivantes :

### Ouvrages généraux/de référence/de consultation

DEL GRANDE, J. J., et J. C. EGSGARD, *Relations*, coll. Éléments de mathématiques modernes, Toronto, éd. Gage, 1980, 468 p.

GARDNER, Martin, *La magie des paradoxes*, Paris, 1975, 135 p. \*

GUEDJ, Denis, *Le théorème du perroquet*, Paris, Éditions du Seuil, 1998, 525 p. \*

KNILL, G., et al., *Omnimaths 11 (Éditions de l'Ouest)*, Montréal, Les Éditions de la Chenelière, 2001, 670 p. \*

SERRA, Michael, *Discovering Geometry - An Inductive Approach*, Berkeley, éd. Key Curriculum Press, 1993, 756 p.

SWOKOWSKI, Earl W., et Jeffery A. COLE, *Algèbre et trigonométrie avec géométrie analytique*, Paris, De Boeck Université, 1998, 809 p. \*

## ACTIVITÉ 3.1 (MGA4U)

### Propositions, implications et réciproques

#### Description

**Durée :** 120 minutes

Dans cette activité, l'élève apprend les notions de proposition, d'implication et de réciproque en examinant des exemples de la vie quotidienne et des mathématiques. Ces notions formeront la base de la pensée logique et des démonstrations.

#### Domaines, attentes et contenus d'apprentissage

**Domaine :** Démonstrations et résolution de problèmes

**Attente :** MGA4U-D-A.1

**Contenu d'apprentissage :** MGA4U-D-Dém.1

#### Notes de planification

- Préparer une feuille d'exercices sur laquelle il faut indiquer si les énoncés sont des propositions, si les implications données sont vraies et si les réciproques d'implications données sont vraies.
- Préparer les exemples et les exercices qui seront utilisés au cours de cette activité.

#### Déroulement de l'activité

##### Mise en situation

- Présenter à l'élève, qui travaille en équipe de quatre, une série d'énoncés à analyser pour déterminer ceux qui sont logiques, ceux qui ne le sont pas et ceux qui sont contradictoires.  
*Exemples :*
  - Si un nombre est pair, alors il est divisible par 2.
  - S'il pleut, alors il y a des nuages dans le ciel. Or il y a des nuages dans le ciel. Donc il pleut.
  - Si un triangle a trois côtés congrus, alors ses trois angles sont congrus.
  - Si deux droites sécantes sont perpendiculaires, alors le produit de leurs vecteurs directeurs est nul. Donc, si le produit des vecteurs directeurs de deux droites est nul, les droites sont perpendiculaires et sécantes.
  - On a trouvé un cheveu blond sur la victime. Or l'accusé a les cheveux blonds. Donc l'accusé est coupable.

- Animer une mise en commun d'idées sur les résultats et demander à l'élève si les réponses étaient évidentes ou si certains énoncés ont suscité une réflexion ou un débat. **(ED)**
- Faire remarquer à l'élève le besoin d'avoir des règles de logique et un vocabulaire approprié en mathématiques (p. ex., *si et seulement si*).

### Expérimentation/Exploration/Manipulation

- Présenter à l'élève le terme *proposition* (une proposition est une phrase déclarative à laquelle il est possible d'attribuer une valeur vraie ou fausse).
- Présenter à l'élève, qui travaille en équipe de quatre, des énoncés parmi lesquels il faut déterminer ceux qui sont des propositions.

*Exemples :*

- Je mens. (Non, car si je mens, la phrase est fausse. Donc, je ne mens pas et la phrase est vraie. Il est donc impossible de lui attribuer une valeur vraie ou fausse.)
- $2 + 2 = 5$  (Oui, il s'agit d'une phrase déclarative fausse.)
- Allons-y tout de suite. (Non, ce n'est pas une phrase déclarative.)
- Animer une mise en commun d'idées, tout en insistant sur le fait qu'un énoncé faux est une proposition. **(EF)**
- Inviter chaque équipe à rédiger deux énoncés dont l'un est une proposition.
- Demander à chaque équipe de présenter ses énoncés au groupe-classe et discuter de ceux-ci.
- Expliquer à l'élève le terme *implication* (une implication est une proposition du type *Si..., alors...* et lui présenter le symbole  $p \Rightarrow q$ , où  $p$  représente l'hypothèse et  $q$  représente la conclusion.
- Présenter à l'élève des exemples d'implications en mathématiques.

*Exemples :*

- Si un triangle a trois côtés congrus, alors ses angles sont congrus.
- Si un parallélogramme a des diagonales perpendiculaires, alors il est un losange.
- Si un quadrilatère est un rectangle, alors ses côtés opposés sont congrus.
- Demander à chaque équipe de rédiger quelques exemples d'implications mathématiques.
- Inviter chaque équipe à présenter ses énoncés, puis discuter de ceux-ci.
- Présenter à l'élève ce qu'est la réciproque d'une implication *Si  $p$ , alors  $q$*  ou  $p \Rightarrow q$  (la réciproque de l'implication *Si  $p$ , alors  $q$*  ou  $p \Rightarrow q$  est l'implication *Si  $q$ , alors  $p$*  ou  $q \Rightarrow p$ ).
- Demander à l'élève, qui travaille toujours en équipe de quatre, d'examiner les implications au tableau, puis de décider si la réciproque d'une implication vraie est toujours vraie.
- Animer une mise en commun d'idées et, au besoin, ajouter d'autres implications vraies dont la réciproque n'est pas vraie, comme les suivantes :

*Exemples :*

- Si  $x = 3$ , alors  $x^2 = 9$ .
- Si trois plans se coupent le long d'une droite, alors leurs vecteurs normaux sont coplanaires.
- Si un triangle rectangle a des côtés de longueurs 3 et 4, alors son hypoténuse a une longueur de 5. **(EF)**
- Souligner à l'élève que la réciproque d'une proposition vraie n'est pas nécessairement vraie.

- Présenter à l'élève une feuille d'exercices sur laquelle on demande si des énoncés donnés sont des propositions, si des implications données sont vraies et si les réciproques d'implications données sont vraies.
- Demander à l'élève de tenter d'en arriver à un consensus, avec les membres de son équipe, au sujet des réponses de la feuille, puis animer une mise en commun d'idées pour les vérifier. **(EF)**

### **Évaluation sommative**

- Voir **Évaluation sommative** de l'activité 3.5.

### **Activités complémentaires/Réinvestissement**

- Demander à l'élève d'effectuer une recherche présentant la raison pour laquelle la Commission Kaufman qui porte sur les poursuites contre Guy Paul Morin, a recommandé que les avocats et les juges reçoivent une formation en logique, puis d'en faire une présentation au groupe-classe. **(AM)**

### **Annexes**

**(espace réservé à l'enseignant ou à l'enseignante pour l'ajout de ses propres annexes)**

## ACTIVITÉ 3.2 (MGA4U)

### Preuve indirecte et l'énoncé *si et seulement si*

#### Description

**Durée :** 120 minutes

Dans cette activité, l'élève apprend par des exemples le principe de la preuve indirecte et l'équivalence d'un énoncé du type *si et seulement si* et d'un énoncé avec sa réciproque, pour faire des démonstrations, dont certaines sont des figures planes.

#### Domaines, attentes et contenus d'apprentissage

**Domaine :** Démonstrations et résolution de problèmes

**Attente :** MGA4U-D-A.1

**Contenus d'apprentissage :** MGA4U-D-Dém.1 - 2 - 5

#### Notes de planification

- Préparer les exemples et les exercices utilisés au cours de cette activité.

#### Déroulement de l'activité

##### Mise en situation

- Présenter à l'élève les équations  $x^2 - 4x + 3 = 0$  et  $\sqrt{x+1} + 1 = x$ , puis lui demander de les résoudre.
- Inviter deux élèves à écrire leurs solutions au tableau.
- Animer une mise en commun d'idées sur la nécessité de vérifier les racines dans le cas de la deuxième équation, alors que ce n'est pas nécessaire de le faire dans le cas de la première.

**(ED)**

- Présenter à l'élève, en même temps, les développements ci-dessous, qui sont donnés sous la forme *si..., alors...*, et animer une mise en commun d'idées en posant la question à la fin.

$$\text{Si } x^2 - 4x + 3 = 0,$$

$$\text{donc } (x-1)(x-3) = 0.$$

$$\text{Donc } x-1 = 0 \text{ ou } x-3 = 0.$$

$$\text{Donc } x = 1 \text{ ou } x = 3.$$

$$\text{Donc les racines sont } x = 1 \text{ et } x = 3.$$

$$\text{Si } \sqrt{x+1} + 1 = x,$$

$$\text{donc } \sqrt{x+1} = x-1.$$

$$\text{Donc } x+1 = x^2 - 2x + 1.$$

$$\text{Donc } 0 = x^2 - 3x.$$

$$\text{Donc } x(x-3) = 0.$$

Donc  $x = 0$  ou  $x = 3$ .

(On vérifie pour conclure que  $x = 3$ .)

Lorsqu'on conclut, à la fin de la première équation, que les racines sont  $x = 1$  et  $x = 3$ , c'est l'équivalent logique de l'affirmation *si  $x = 1$  ou  $x = 3$ , alors  $x^2 - 4x + 3 = 0$* .

Pourquoi accepter cette conclusion alors qu'on a prouvé *si  $x^2 - 4x + 3 = 0$ , alors  $x = 1$  ou  $x = 3$*  et que, selon l'activité précédente, ces implications ne sont pas équivalentes?

- Animer une mise en commun d'idées sur le besoin de réfléchir à l'emploi que l'on semble faire de la logique pour ne pas commettre des erreurs de logique ou de mathématiques. **(ED)**

### Expérimentation/Exploration/Manipulation

Énoncé de type «*si et seulement si*»

- Présenter à l'élève, au tableau ou sur un transparent, un triangle isocèle, puis lui demander d'énoncer une propriété sous forme d'implication, p. ex., *si un triangle a deux côtés congrus, alors les angles opposés à ces côtés sont congrus* et demander ensuite d'énoncer l'implication réciproque, p. ex., *si un triangle a deux angles congrus, alors les côtés opposés à ces angles sont congrus*.
- Faire remarquer à l'élève que, pour prouver ces propriétés, il faut prouver les deux implications séparément (ce qui sera fait dans la prochaine activité).
- Expliquer à l'élève que l'on peut décrire les deux implications en disant *un triangle a deux côtés congrus si et seulement si les angles opposés à ces côtés sont congrus*.
- Demander à l'élève de relever, dans les énoncés qui ont été vus en classe lors de la dernière activité, ceux qui formulent une implication vraie dont la réciproque est aussi vraie et de les écrire sous la forme *p si et seulement si q*.
- Animer une mise en commun d'idées pour vérifier les réponses de l'élève. **(EF)**
- Reprendre la résolution de l'équation  $x^2 - 4x + 3 = 0$  et montrer que chaque étape de sa résolution peut être considérée comme une situation *p si et seulement si q* que l'on écrira  $p \Leftrightarrow q$ :

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-3) = 0 \quad (\text{c'est-à-dire que si } x^2 - 4x + 3 = 0, \text{ alors } (x-1)(x-3) = 0$$

$$\text{et si } (x-1)(x-3) = 0, \text{ alors } x^2 - 4x + 3 = 0)$$

$$\Leftrightarrow x-1 = 0 \text{ ou } x-3 = 0 \quad (\text{c'est-à-dire que si } (x-1)(x-3) = 0, \text{ alors } x-1 = 0$$

$$\text{ou } x-3 = 0 \text{ et si } x-1 = 0 \text{ ou } x-3 = 0, \text{ alors}$$

$$(x-1)(x-3) = 0)$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 3 \quad (\text{c'est-à-dire que si } x-1 = 0 \text{ ou } x-3 = 0, \text{ alors}$$

$$x = 1 \text{ ou } x = 3 \text{ et si } x = 1 \text{ ou } x = 3, \text{ alors } x-1 = 0 \text{ ou}$$

$$x-3 = 0)$$

- Expliquer à l'élève que, lorsqu'on écrit les étapes de la résolution de cette façon, il n'est pas nécessaire de vérifier les solutions (sauf pour vérifier des erreurs de calcul) puisqu'on a démontré l'implication et sa réciproque.

- Présenter à l'élève la résolution de l'équation  $\sqrt{x+1} + 1 = x$ , puis lui demander de placer le symbole  $\Leftrightarrow$  à chaque étape de la résolution où la double implication est vraie en attirant son attention sur le fait qu'une des étapes n'est vraie que dans une direction :

$$\sqrt{x+1} + 1 = x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1} = x - 1$$

$$\Rightarrow x + 1 = x^2 - 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow 0 = x^2 - 3x$$

$$\Leftrightarrow x(x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 3$$

- Animer une mise en commun d'idées sur la nécessité de vérifier les solutions apparentes de l'équation  $\sqrt{x+1} + 1 = x$  puisque, dans une des étapes, la réciproque n'est pas vraie et que l'on a prouvé que si  $x$  est une solution, alors  $x = 0$  ou  $x = 3$ , mais que l'on n'a pas prouvé que si  $x = 0$  ou  $x = 3$ , alors  $x$  est une solution.
- Présenter à l'élève plusieurs équations, puis lui demander de les résoudre en plaçant le symbole  $\Leftrightarrow$  ou  $\Rightarrow$  à chaque étape et d'indiquer, à la fin, si on doit vérifier les solutions.

*Exemples :*

$$\sqrt{-x} + 2 = -2x + 1$$

$$4x^2 + 4x = 15$$

$$3^{2x} + 9 = 10(3^x)$$

$$x + 2 = \sqrt{x - 1}$$

- Demander à un ou à une élève de présenter son travail au tableau et animer une mise en commun d'idées pour vérifier le travail. **(EF)**

### *Preuve indirecte*

- Tracer un aperçu historique de Pythagore et de ses disciples, puis raconter à l'élève leur grande surprise lorsqu'ils ont découvert l'existence des longueurs qui ne pouvaient être mesurées, c'est-à-dire qu'elles ne pouvaient pas être représentées par une fraction ou un nombre fractionnaire (p. ex., la longueur de la diagonale d'un carré dont les côtés ont une longueur de 1). Ils ont été tellement surpris qu'ils ont convenu de garder le secret, mais un disciple, qui n'avait pu garder le silence, a été trouvé assassiné peu après. **(AM)**
- Rappeler à l'élève que, de nos jours, un nombre qui ne peut être exprimé par une fraction est appelé un nombre irrationnel.
- Présenter la preuve que  $\sqrt{2}$  est un nombre irrationnel, qui vient des Grecs de l'Antiquité (sauf la notation), en indiquant que la preuve fait appel à un argument appelé *preuve indirecte*, *preuve par contradiction* ou *preuve par réduction à l'absurde*.

#### *Preuve*

La preuve indirecte nous invite à supposer le contraire de ce que l'on veut prouver pour en arriver à une contradiction. Or, on veut prouver que  $\sqrt{2}$  est un nombre irrationnel.

Supposons le contraire, c'est-à-dire que  $\sqrt{2}$  est un nombre rationnel (cet énoncé devient notre hypothèse).

Puisque  $\sqrt{2}$  est un nombre rationnel, alors on peut l'exprimer sous la forme d'une fraction irréductible  $\frac{a}{b}$ .

Donc  $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ , où  $\frac{a}{b}$  est une fraction irréductible.

Donc  $2 = \frac{a^2}{b^2}$ , d'où  $a^2 = 2b^2$ .

Puisque le membre de droite est un nombre pair, alors le membre de gauche est un nombre pair et  $a$  est donc un nombre pair.

Il existe donc un entier  $c$  tel que  $a = 2c$ .

Donc  $a^2 = 2b^2$  devient  $4c^2 = 2b^2$ , d'où  $b^2 = 2c^2$ .

Puisque le membre de droite est pair, alors le membre de gauche est un nombre pair et  $b$  est donc un nombre pair.

On a donc prouvé que  $a$  et  $b$  sont des nombres pairs, ce qui contredit l'énoncé que  $\frac{a}{b}$  est une fraction irréductible. Puisque le développement est logique, c'est l'hypothèse qui doit être fausse.

Donc  $\sqrt{2}$  n'est pas un nombre rationnel.

- Demander à l'élève de montrer, par une preuve indirecte semblable, que  $\sqrt{3}$  est un nombre irrationnel, puis l'inviter à faire vérifier sa preuve par ses pairs. (EF)
- Distribuer à l'élève une liste de vérification des concepts, telle que celle ci-dessous, puis lui demander de la remplir en cochant la case appropriée. (O)

Concepts	Je comprends bien (Je maîtrise.)	Je vais vérifier et chercher (Je doute.)	J'ai besoin d'aide (Au secours!)
Proposition			
Implication			
Réciproque			
Si et seulement si			
Preuve indirecte			

### Évaluation sommative

- Voir **Évaluation sommative** de l'activité 3.5.

### Activités complémentaires/Réinvestissement

- Demander à l'élève d'effectuer une recherche sur un des sujets ci-dessous, puis d'en présenter les résultats au groupe-classe :

- la logique au Moyen Âge;
- la logique en philosophie;
- la logique dans le roman *Alice au pays des merveilles* (l'auteur était professeur de logique mathématique à l'université d'Oxford et le roman contient de nombreuses allusions à l'emploi de la logique). (AM)

## **Annexes**

**(espace réservé à l'enseignant ou à l'enseignante pour l'ajout de ses propres annexes)**

## ACTIVITÉ 3.3 (MGA4U)

### Démonstrations par déduction

#### Description

**Durée :** 540 minutes

Dans cette activité, l'élève découvre, par des recherches, le rôle des axiomes dans un système déductif et montre des propriétés de figures planes. Elle ou il améliore ainsi un aspect de la communication mathématique, soit la justification de son raisonnement.

#### Domaines, attentes et contenus d'apprentissage

**Domaine :** Démonstrations et résolution de problèmes

**Attente :** MGA4U-D-A.1 - 2

**Contenus d'apprentissage :** MGA4U-D-Dém.1 - 2 - 6  
MGA4U-D-Stra.3

#### Notes de planification

- Préparer les exemples, les exercices et les problèmes qui seront présentés au cours de cette activité.
- Préparer une liste de questions qui permettent à l'élève de réfléchir sur son apprentissage.
- Réserver le laboratoire d'informatique.

#### Déroulement de l'activité

##### Mise en situation

- Demander à l'élève d'utiliser *Cybergéomètre* pour construire un triangle  $ABC$  et les médiatrices de ses côtés, puis de tenter de découvrir une propriété des médiatrices. **(T)**
- Animer une mise en commun d'idées pour décider si la propriété peut être prouvée, c'est-à-dire s'il y a un argument logique pour confirmer cette propriété. **(ED)**
- Faire remarquer à l'élève la distinction entre l'induction qui permet de découvrir des propriétés et la déduction qui permet de confirmer que la propriété est toujours vérifiée.

## Expérimentation/Exploration/Manipulation

### *Système déductif*

- Demander à l'élève, qui travaille en équipe de quatre, de prouver la propriété des médiatrices des côtés d'un triangle, soit que les médiatrices se coupent en un même point qui est équidistant des trois sommets.
- Faire une mise en commun d'idées, au besoin, pour aider l'élève dans sa démarche. (L'argument peut mentionner que tout point sur la médiatrice du côté  $AB$  est équidistant des extrémités  $A$  et  $B$  et que tout point sur la médiatrice du côté  $BC$  est équidistant des extrémités  $B$  et  $C$ . Donc, leur point d'intersection est équidistant des points  $A$ ,  $B$  et  $C$ . Puisque le point d'intersection est équidistant de  $A$  et de  $C$ , il est situé sur la médiatrice du côté  $AC$ . Les trois médiatrices sont donc concourantes et leur point d'intersection est équidistant des trois sommets.) **(EF)**
- Faire remarquer à l'élève que cette preuve est logique, mais que, pour l'accepter, il faut croire que tous les points sur la médiatrice d'un segment sont équidistants des extrémités du segment.
- Demander à l'élève de prouver cet énoncé, ce qui permettra d'accepter la preuve précédente.
- Suggérer des pistes à l'élève, au besoin (on peut former deux triangles en joignant le point sur la médiatrice aux extrémités du segment et montrer que les triangles sont congruents). **(EF)**
- Faire remarquer à l'élève que cette preuve est logique, mais que, pour l'accepter, il faut croire que deux triangles sont congruents si deux des côtés et l'angle compris d'un triangle sont respectivement congrus à deux des côtés et à l'angle compris de l'autre triangle (ou que le théorème de Pythagore est vrai).
- Animer un échange sur le fait que l'on peut continuer à reculer de cette manière sans jamais s'arrêter, d'où la nécessité, dans un système déductif, d'avoir des postulats ou des axiomes que l'on accepte sans les prouver.
- Donner à l'élève un bref aperçu du système déductif d'Euclide, les *Éléments*, et de son importance dans l'histoire. **(AM)**
- Présenter à l'élève les postulats, ou axiomes, qu'Euclide a rédigés et qui sont la base de son système déductif ainsi que les axiomes et postulats de la géométrie moderne tels que ceux de *Discovering Geometry* (Serra).

### *Preuves en géométrie*

- Animer un échange sur le théorème de Pythagore et demander à l'élève si la situation est réversible, c'est-à-dire si, dans un triangle, le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, peut-on conclure que le triangle est rectangle?
- Demander à l'élève d'énoncer le théorème de Pythagore sous la forme d'un énoncé *p si et seulement si q*, et indiquer que l'on veut montrer le théorème, ce qui nécessite deux preuves.
- Présenter à l'élève les deux énoncés sur le théorème de Pythagore, amorcer la preuve, lui demander de la continuer, puis, au bout d'un certain temps, animer une mise en commun d'idées. **(EF)**

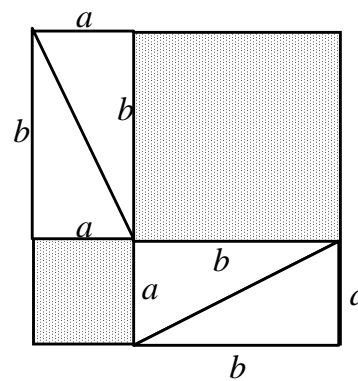
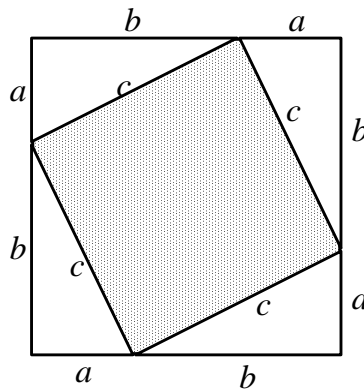
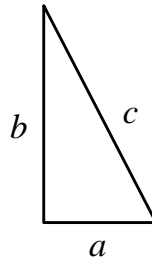
#### *Exemple :*

Premier énoncé :

- Si un triangle est rectangle, alors le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

*Preuve*

À partir du triangle ci-dessous, on construit deux carrés dont les côtés mesurent  $a + b$  et on les recouvre partiellement à l'aide de quatre triangles, comme suit :



L'aire du premier carré est égale à  $c^2 + 4\left(\frac{ab}{2}\right)$ , tandis que l'aire du deuxième carré est égale à  $a^2 + b^2 + 4\left(\frac{ab}{2}\right)$ . Or l'aire de chaque carré est la même et on obtient donc

$$a^2 + b^2 = c^2 .$$

Deuxième énoncé :

- Si, dans un triangle, le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors le triangle est rectangle.

*Résumé de la preuve*

On a un triangle dans lequel  $a^2 + b^2 = c^2$ . On construit un triangle rectangle dont les longueurs de côtés  $a$ ,  $b$  et  $d$  donnent  $a^2 + b^2 = d^2$ , ce qui prouve que  $c = d$  et on prouve ensuite que les deux triangles sont congruents.

- Présenter à l'élève, qui travaille en équipe de quatre, des propriétés de figures planes réparties en trois degrés de difficulté qui comprennent des énoncés du genre *si et seulement si* ainsi que des énoncés qui exigent une preuve indirecte et lui demander de les prouver. **(EF)**

*Exemples :*

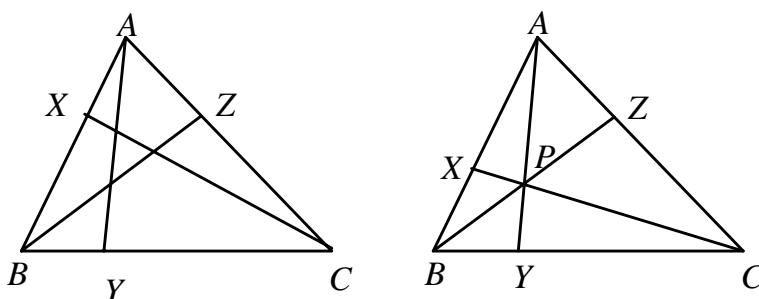
- Montrer que la somme des mesures des angles du triangle  $ABC$  est égale à  $180^\circ$ . (Indication : Construire au point  $A$  une droite qui est parallèle au côté  $BC$ .)
- Montrer qu'un triangle a deux côtés congrus si et seulement si les angles opposés à ces côtés sont congrus.

- Montrer que le segment qui joint le milieu d'une corde d'un cercle au centre du cercle est perpendiculaire à la corde.
- Montrer que, les deux tangentes tracées d'un même point à un cercle ont la même longueur.
- Utiliser *Cybergéomètre* pour découvrir une propriété des diagonales d'un cerf-volant et prouver la propriété. **(T)**
- Montrer que, dans un triangle  $ABC$ , la bissectrice de l'angle  $A$  coupe le côté  $BC$  dans le même rapport que les longueurs des deux autres côtés du triangle (Indication : Prolonger le côté  $BA$  jusqu'à un point  $E$  de manière que  $AE = AC$ , puis joindre les points  $E$  et  $C$ ).
- Animer des mises en commun d'idées, au besoin, pour discuter des preuves ou du style de la présentation d'une preuve. **(EF)**
- Présenter à l'élève le théorème de Ceva et les étapes de sa preuve, puis lui demander de compléter les détails.

*Théorème de Ceva*

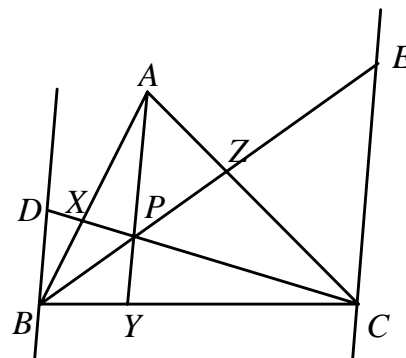
Soit un triangle  $ABC$  dans lequel des segments  $AY$ ,  $BZ$  et  $CX$  joignent chacun un sommet au côté opposé. Ces segments sont concourants si et seulement si

$$\frac{AX}{XB} \times \frac{BY}{YC} \times \frac{CZ}{ZA} = 1.$$



*Étapes principales de la preuve que, si les segments sont concourants, alors le produit est égal à 1.*

- Construire deux droites parallèles à  $AY$ , passant respectivement aux points  $B$  et  $C$ .
- Prolonger  $BZ$  jusqu'au point  $E$  sur une des parallèles et prolonger  $CX$  jusqu'au point  $D$  sur l'autre parallèle.
- Montrer que les triangles ci-après sont semblables :  $\triangle AXP \approx \triangle BXD$ ,  $\triangle CZE \approx \triangle AZP$ ,  $\triangle BYP \approx \triangle BCE$  et  $\triangle BCD \approx \triangle YCP$  et conclure que  $\frac{AX}{BX} = \frac{AP}{BD}$ ,  $\frac{CZ}{AZ} = \frac{CE}{AP}$ ,  $\frac{BY}{BC} = \frac{YP}{CE}$  et



$$\frac{BC}{YC} = \frac{BD}{YP}.$$

- Créer une égalité entre le produit des membres de gauche et le produit des membres de droite et simplifier l'égalité.
- La preuve de la réciproque est plutôt difficile. La réciproque sera donc acceptée sans preuve.
- Demander à l'élève d'utiliser le théorème de Ceva pour montrer les théorèmes suivants :
  - les trois médianes d'un triangle sont concourantes;
  - les médiatrices des côtés d'un triangle sont concourantes;
  - les bissectrices des angles d'un triangle sont concourantes (il faudra se reporter au théorème présenté précédemment qui porte sur la bissectrice d'un angle dans un triangle);
  - les hauteurs des angles d'un triangle sont concourantes (il faut exprimer la tangente des angles de deux façons).
- Inviter l'élève à transcrire sa solution au tableau ou sur un transparent. **(EF)**
- Remettre à l'élève une liste de questions, puis lui demander d'y répondre pour lui permettre d'analyser ses habiletés de démonstrations de preuve.

*Exemples :*

- Devant une preuve à rédiger, est-ce que je sais toujours quoi faire?
- Quand je ne sais pas quoi faire, où dois-je chercher?
- Devant une preuve à rédiger, est-ce que je peux trouver les éléments nécessaires dans mon cahier de notes? **(O)**

### **Évaluation sommative**

- Voir **Évaluation sommative** de l'activité 3.5.

### **Activités complémentaires/Réinvestissement**

- Présenter à l'élève, qui travaille avec un ou une partenaire, une liste de noms et de sujets qui portent sur les Grecs de l'Antiquité, puis lui demander d'en choisir un, de consulter deux sources et de faire une présentation orale qui établit son rapport aux mathématiques.

*Exemples :*

- Archimède, Euclide, Thalès de Milet, Pythagore, Ptolémée, Platon;
- la géométrie chez les Grecs;
- les solides platoniciens;
- le rationalisme chez les Grecs. **(AM)**

### **Annexes**

**(espace réservé à l'enseignant ou à l'enseignante pour l'ajout de ses propres annexes)**

## ACTIVITÉ 3.4 (MGA4U)

### Démonstrations au moyen de la géométrie analytique et des vecteurs

#### Description

**Durée :** 240 minutes

Dans cette activité, l'élève montre des propriétés de figures planes à l'aide de la géométrie analytique et de vecteurs pour juger de la pertinence d'une méthode de démonstration dans différentes situations.

#### Domaines, attentes et contenus d'apprentissage

**Domaine :** Démonstration et résolution de problèmes

**Attente :** MGA4U-D-A.1

**Contenus d'apprentissage :** MGA4U-D-Dém.3 - 4

#### Notes de planification

- Préparer les exemples et les énoncés qui seront utilisés au cours de cette activité.
- S'assurer d'avoir accès aux ordinateurs pour utiliser *Cybergéomètre*.

#### Déroulement de l'activité

##### Mise en situation

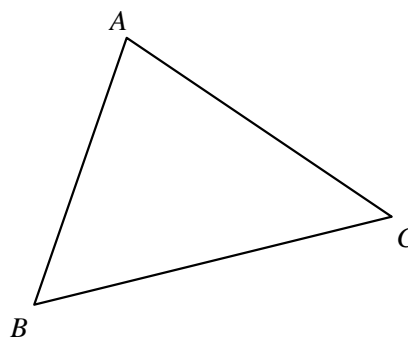
- Demander à l'élève de tracer un triangle quelconque  $ABC$ .
- Demander à l'élève de trouver les points milieux de deux côtés, puis les lui faire joindre au moyen d'un segment.
- Discuter avec l'élève des propriétés de cette construction.
- Inviter l'élève à proposer des façons de prouver les propriétés mentionnées ci-dessus. **(ED)**

##### Expérimentation/Exploration/Manipulation

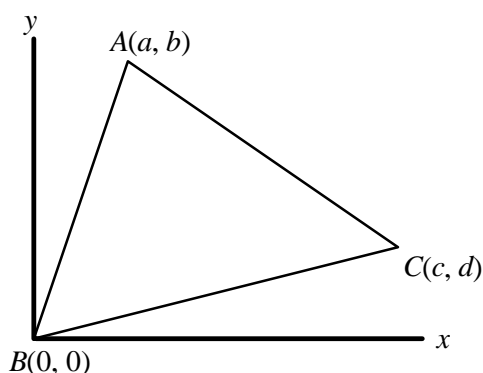
- Présenter à l'élève le théorème suivant :  
*Théorème*  
Le segment de droite qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté et sa longueur est la moitié de celle du côté.

*Preuves à l'aide de la géométrie analytique*

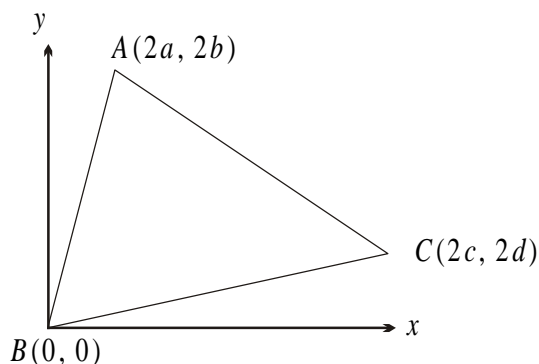
- Animer un échange sur les façons de placer le triangle ci-contre dans le plan cartésien dans le but de faciliter la preuve.



- Placer le triangle dans le plan cartésien comme dans le diagramme ci-contre et demander à l'élève de déterminer les coordonnées des milieux  $D$  et  $E$  des côtés respectifs  $AB$  et  $AC$ , puis de montrer que les segments  $DE$  et  $BC$  sont parallèles et que  $BC = 2DE$ .



- Demander à l'élève de trouver ce que l'on aurait pu faire pour éviter l'emploi de fractions (attribuer les coordonnées  $A(2a, 2b)$  et  $C(2c, 2d)$ ) et lui demander de recommencer la preuve avec les nouvelles coordonnées.



- Animer un échange sur la communication d'une preuve à l'aide de la géométrie analytique (p. ex., il faut décrire où l'on place le plan ou la figure dans le plan ainsi que les coordonnées employées).
- Demander à l'élève de montrer le théorème ci-dessous au moyen de la géométrie analytique et de faire lire sa démonstration par ses pairs, puis animer une mise en commun d'idées sur le sens de *quadrilatère quelconque* et indiquer la façon dont on le traduit au moyen de coordonnées. **(EF)**

*Théorème*

Les segments qui relient les milieux des côtés d'un quadrilatère quelconque forment un parallélogramme.

- Présenter à l'élève d'autres énoncés de géométrie qu'il lui faut montrer au moyen de la géométrie analytique et dont la démonstration sera vérifiée avec l'aide des pairs. **(EF)**

*Exemples :*

- Si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu, le quadrilatère est un parallélogramme.
- Si les diagonales d'un quadrilatère se coupent perpendiculairement en leur milieu, le quadrilatère est un losange.
- Le segment qui joint le centre d'un cercle au milieu d'une de ses cordes est perpendiculaire à cette corde.
- Animer une mise en commun d'idées pour relever les difficultés rencontrées. **(EF)**

*Preuves à l'aide de vecteurs*

- Reprendre le théorème donné au début de la section **Expérimentation/Exploration/Manipulation**.
- Montrer à l'élève la manière de choisir  $A$ ,  $\overline{AB}$  et  $\overline{AC}$  comme repère du plan qui contient le triangle.
- Demander à l'élève d'exprimer  $\overline{DE}$  et  $\overline{BC}$  comme combinaisons linéaires de  $\overline{AB}$  et de  $\overline{AC}$  et d'indiquer la façon dont ces résultats prouvent tout de suite le théorème.
- Demander à l'élève de montrer le théorème ci-dessous au moyen des vecteurs et de faire lire sa démonstration par ses pairs, tout en circulant pour aider, au besoin. **(EF)**

*Théorème*

Les milieux des côtés d'un quadrilatère quelconque forment un parallélogramme.

- Présenter à l'élève, qui travaille en équipe de quatre, d'autres énoncés de géométrie qu'il lui faut montrer au moyen des vecteurs. **(EF)**

*Exemples :*

- Si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu, le quadrilatère est un parallélogramme.
- Si les diagonales d'un quadrilatère se coupent perpendiculairement en leur milieu, le quadrilatère est un losange.
- L'angle inscrit dans un cercle qui intercepte un diamètre est un angle droit.

Exemple d'une preuve où  $A$  et  $B$  sont les extrémités du diamètre,  $C$  est le sommet de l'angle et  $O$  est le centre du cercle.

$$\begin{aligned}
 & \overline{AC} \cdot \overline{BC} \\
 &= (\overline{AO} + \overline{OC}) \cdot (\overline{BO} + \overline{OC}) \\
 &= (\overline{AO} + \overline{OC}) \cdot (-\overline{AO} + \overline{OC}) \\
 &= -\overline{AO} \cdot \overline{AO} + \overline{AO} \cdot \overline{OC} - \overline{OC} \cdot \overline{AO} + \overline{OC} \cdot \overline{OC} \\
 &= -|\overline{AO}|^2 + \overline{OC} \cdot \overline{AO} - \overline{OC} \cdot \overline{AO} + |\overline{OC}|^2 \\
 &= -|\overline{AO}|^2 + |\overline{OC}|^2 \\
 &= 0 \quad (2 \text{ rayons})
 \end{aligned}$$

- Le segment qui joint le centre d'un cercle au milieu d'une de ses cordes est perpendiculaire à cette corde.

- Présenter à l'élève, qui travaille avec un ou une partenaire, des situations où il lui faut découvrir des propriétés géométriques au moyen de *Cybergéomètre*, puis les montrer à l'aide de la géométrie analytique ou des vecteurs. **(T)**
- Animer une mise en commun d'idées pour vérifier le travail de l'élève. **(EF)**

### **Évaluation sommative**

- Voir **Évaluation sommative** de l'activité 3.5.

### **Activités complémentaires/Réinvestissement**

- Demander à l'élève de prouver la loi des sinus et la loi du cosinus à l'aide des vecteurs.

### **Annexes**

**(espace réservé à l'enseignant ou à l'enseignante pour l'ajout de ses propres annexes)**

## ACTIVITÉ 3.5 (MGA4U)

### Résolution de problèmes 3

#### Description

**Durée :** 300 minutes

Dans cette activité, l'élève mobilise ses nouvelles connaissances pour résoudre des problèmes qui portent sur des démonstrations en abordant la résolution d'un problème à grande portée.

#### Domaines, attentes et contenus d'apprentissage

**Domaine :** Démonstrations et résolution de problèmes

**Attentes :** MGA4U-D-A.2 - 3

**Contenus d'apprentissage :** MGA4U-D-Stra.1 - 2 - 4  
MGA4U-D-Prob.1 - 2 - 3

#### Notes de planification

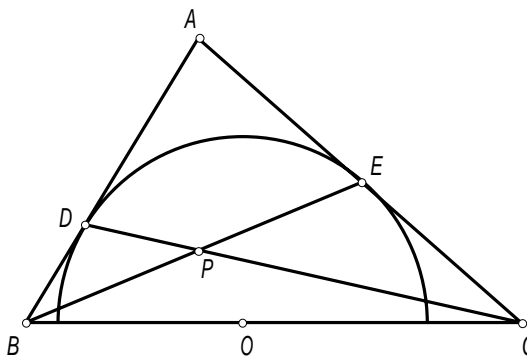
- S'assurer d'avoir à portée de la main la série de problèmes préparés à l'activité 1.5.
- Préparer quelques problèmes de grande portée dont celui présenté dans la mise en situation.
- Préparer une évaluation sommative qui porte sur les activités de l'unité 3.

#### Déroulement de l'activité

##### Mise en situation

- Présenter à l'élève le problème de grande portée ci-après, qui sera résolu sur une période de quelques jours.

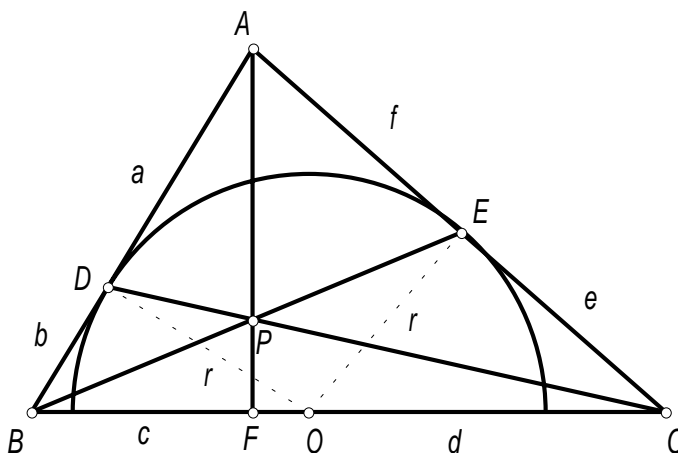
- On considère un triangle  $ABC$ . Un demi-cercle, dont le centre  $O$  est situé sur le côté  $BC$ , est inscrit dans le triangle de manière à toucher aux côtés  $AB$  et  $AC$  aux points respectifs  $D$  et  $E$ . Les segments  $BE$  et  $CD$  se coupent au point  $P$ . Montrer que  $P$  est situé sur la hauteur menée au point  $A$ .



- Demander à l'élève, qui travaille avec un ou une partenaire, de désigner des théorèmes qui pourraient être utiles pour résoudre ce problème.

### Expérimentation/Exploration/Manipulation

- Animer une mise en commun d'idées sur les résultats. **(ED)**  
*Exemples :*
  - Les rayons d'un cercle inscrit sont perpendiculaires aux côtés.
  - Le centre du cercle inscrit est situé sur la bissectrice de l'angle  $A$ .
  - Le point  $O$  divise le côté  $BC$  dans un rapport égal au rapport des côtés  $AB$  et  $AC$ .
  - Les tangentes menées au point  $A$  ont la même longueur.
- Inviter l'élève à suggérer des façons de faire cette preuve (noter qu'elle ne peut se faire au moyen de la géométrie analytique, car les expressions algébriques deviennent de plus en plus complexes). **(EF)**
- Demander à l'élève de tracer la hauteur au point  $A$  et de revoir les théorèmes écrits dans son cahier de notes.



- Demander à l'élève, qui travaille en équipe de quatre, si le théorème de Ceva pourrait servir, c'est-à-dire s'il est possible de montrer que  $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f} = 1$ , où  $a = AD$ ,  $b = DB$ ,  $c = BF$ ,  $d = FC$ ,  $e = CE$  et  $f = EA$ , et l'encourager à l'utiliser.
- Poser des questions, au besoin, pour guider l'élève :

Exemples :

- Les angles droits formés par les rayons peuvent-ils servir?
- Les triangles rectangles suggèrent-ils une approche?
- Y a-t-il des triangles semblables?
- Aider l'élève à mener la preuve à terme.

Exemple :

Soit  $h = AF$ .

Les triangles  $ABF$  et  $OBD$  sont rectangles et ont un angle  $B$  en commun. Leurs angles sont donc congrus deux à deux.

Les triangles sont donc semblables, d'où  $\frac{c}{b} = \frac{h}{r}$  (1).

Les triangles  $AFC$  et  $OEC$  sont rectangles et ont un angle  $C$  en commun. Leurs angles sont donc congrus deux à deux.

Les triangles sont donc semblables, d'où  $\frac{e}{d} = \frac{r}{h}$  (2).

Puisque les tangentes à un cercle menées d'un même point sont de même longueur, alors  $AD = AE$ , ou  $a = f$ .

$$\begin{aligned} & \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f} \\ &= \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{a} \text{ (puisque } a = f \text{)} \\ &= \frac{ce}{bd} \\ &= \frac{c}{b} \times \frac{e}{d} \\ &= \frac{h}{r} \times \frac{r}{h} \text{ (selon (1) et (2))} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Selon le théorème de Ceva, les segments  $AF$ ,  $BE$  et  $CD$  sont concourants.

Donc le point  $P$  est situé sur la hauteur  $AF$ .

Il est à noter que, lorsqu'on la lit, la preuve semble facile, mais que l'approche à suivre pour obtenir les fractions appropriées n'est pas évidente et qu'elle exige beaucoup de tâtonnements.

- Présenter à l'élève d'autres problèmes de grande portée pour lui permettre de travailler avec persévérance sur la résolution des problèmes.
- Intervenir, au besoin, et accompagner l'élève dans sa démarche. **(EF)**
- Demander à l'élève de faire un inventaire de ses habiletés utilisées pour mener une preuve à bonne fin. **(O)**
- Faire passer à l'élève une tâche d'évaluation sommative qui porte sur les activités de l'unité 3. **(ES)**

## **Évaluation sommative**

- Présenter à l'élève une tâche d'évaluation qui touche les activités de l'unité 3 à l'aide d'un test papier-crayon et en utilisant une grille d'évaluation adaptée qui comporte des critères précis de rendement en fonction des quatre compétences. L'élève doit pouvoir :
  - Connaissance et compréhension
    - distinguer, parmi des énoncés, ceux qui sont des propositions;
    - distinguer, parmi des énoncés d'exemples mathématiques, ceux qui sont des implications;
    - déterminer si une implication possède une réciproque.
  - Réflexion, recherche et résolution de problèmes
    - appliquer les étapes du processus de résolution de problèmes pour montrer certaines propriétés des figures planes.
  - Communication
    - présenter les étapes de son raisonnement;
    - utiliser la langue, la terminologie et les symboles appropriés.
  - Mise en application
    - analyser les étapes d'une preuve et en reconnaître la validité.

## **Activités complémentaires/Réinvestissement**

- Présenter à l'élève des problèmes qui comportent un degré élevé de difficulté.

## **Annexes**

**(espace réservé à l'enseignant ou à l'enseignante pour l'ajout de ses propres annexes)**

Annexe MGA4U 3.5.1 : Grille d'évaluation adaptée - Démonstrations

<i>Type d'évaluation</i> : diagnostique <input type="checkbox"/> formative <input type="checkbox"/> sommative <input checked="" type="checkbox"/>				
<i>Compétences et critères</i>	<b>50 - 59 % Niveau 1</b>	<b>60 - 69 % Niveau 2</b>	<b>70 - 79 % Niveau 3</b>	<b>80 - 100 % Niveau 4</b>
<b>Connaissance et compréhension</b>				
L'élève : - distingue, parmi des énoncés, ceux qui sont des propositions. - distingue, parmi des énoncés d'exemples mathématiques, ceux qui sont des implications. - détermine si une implication possède une réciproque.	L'élève démontre une <b>compréhension limitée</b> des concepts.	L'élève démontre une <b>compréhension partielle</b> des concepts.	L'élève démontre une <b>compréhension générale</b> des concepts.	L'élève démontre une <b>compréhension approfondie</b> des concepts.
<b>Réflexion, recherche et résolution de problèmes</b>				
L'élève : - applique des étapes d'un processus d'enquête et de résolution de problèmes pour montrer certaines propriétés des figures planes.	L'élève applique les étapes d'un processus d'enquête et de résolution de problèmes <b>avec une efficacité limitée</b> .	L'élève applique les étapes d'un processus d'enquête et de résolution de problèmes <b>avec une certaine efficacité</b> .	L'élève applique les étapes d'un processus d'enquête et de résolution de problèmes <b>avec une grande efficacité</b> .	L'élève applique les étapes d'un processus d'enquête et de résolution de problèmes <b>avec une très grande efficacité et pose des questions susceptibles d'élargir la réflexion</b> .
<b>Communication</b>				
L'élève : - utilise la langue, les symboles et la terminologie propres aux mathématiques. - communique ses raisonnements.	L'élève utilise <b>rarement</b> la langue, les symboles et la terminologie appropriés et communique ses raisonnements <b>avec peu de clarté et en donnant des explications limitées</b> .	L'élève utilise <b>parfois</b> la langue, les symboles et la terminologie appropriés et communique ses raisonnements <b>avec une certaine clarté et en donnant certaines explications</b> .	L'élève utilise <b>souvent</b> la langue, les symboles et la terminologie appropriés et communique ses raisonnements <b>avec une grande clarté et en donnant des explications substantielles</b> .	L'élève utilise <b>toujours ou presque toujours</b> la langue, les symboles et la terminologie appropriés et communique ses raisonnements <b>avec une très grande clarté et concision, et en donnant des explications complètes</b> .

<i>Mise en application</i>				
L'élève : - applique des concepts et des procédés de la déduction formelle en analysant les étapes d'une preuve et en reconnaissant sa validité.	L'élève applique des concepts et des procédés de la déduction formelle en suivant une preuve et en reconnaissant sa validité dans des situations <b>simples dans des contextes familiers.</b>	L'élève applique des concepts et des procédés de la déduction formelle en suivant une preuve et en reconnaissant sa validité dans des situations <b>d'une certaine complexité dans des contextes familiers.</b>	L'élève applique des concepts et des procédés de la déduction formelle en suivant une preuve et en reconnaissant sa validité dans des situations <b>complexes dans des contextes familiers.</b>	L'élève applique des concepts et des procédés de la déduction formelle en suivant une preuve et en reconnaissant sa validité dans des situations <b>complexes dans des contextes familiers et peu familiers.</b>
Remarque : L'élève dont le rendement est en deçà du niveau 1 (moins de 50 %) n'a pas satisfait aux attentes pour cette tâche.				



## APERÇU GLOBAL DE L'UNITÉ 4 (MGA4U)

### Combinatoire

#### Description

**Durée :** 21 heures

Cette unité porte sur les principes de base de la mathématique discrète. L'élève apprend, par découverte et par tâtonnements, les notions de base du dénombrement, des arrangements et des combinaisons pour résoudre divers problèmes de combinatoire. Elle ou il utilise la notation appropriée liée aux problèmes d'arrangement, de permutation ainsi que de combinaison et évalue des expressions numériques faisant appel à la notation factorielle.

#### Domaines, attentes et contenus d'apprentissage

**Domaines :** Démonstrations et résolution de problèmes, Mathématiques discrètes

**Attentes :** MGA4U-D-A.2 - 3  
MGA4U-M-A.1

**Contenus d'apprentissage :** MGA4U-D-Stra.1 - 2 - 3 - 4  
MGA4U-D-Prob.1 - 2 - 3  
MGA4U-M-Tech.1 - 2 - 3 - 4 - 5

#### Titres des activités

#### Durée

<b>Activité 4.1 :</b> Dénombrements et arrangements	240 minutes
<b>Activité 4.2 :</b> Manipulations algébriques	120 minutes
<b>Activité 4.3 :</b> Combinaisons	300 minutes
<b>Activité 4.4 :</b> Combinaisons avec objets identiques	300 minutes
<b>Activité 4.5 :</b> Résolution de problèmes 4	300 minutes

#### Liens

L'enseignant ou l'enseignante prévoit l'établissement de liens entre le contenu du cours et l'animation culturelle (**AC**), la technologie (**T**), les perspectives d'emploi (**PE**) et les autres matières (**AM**) au moment de sa planification des stratégies d'enseignement et d'apprentissage. Des suggestions pratiques sont intégrées dans la section **Déroulement de l'activité** des activités de cette unité.

## Mesures d'adaptation pour répondre aux besoins des élèves

L'enseignant ou l'enseignante doit planifier des mesures d'adaptation pour répondre aux besoins des élèves en difficulté et de celles et ceux qui suivent un cours d'ALF/PDF ainsi que des activités de renforcement et d'enrichissement pour tous les élèves. L'enseignant ou l'enseignante trouvera plusieurs suggestions pratiques dans *La boîte à outils*, p. 11-21.

## Évaluation du rendement de l'élève

L'évaluation fait partie intégrante de la dynamique pédagogique. L'enseignant ou l'enseignante doit donc planifier et élaborer en même temps les activités d'apprentissage et les étapes de l'évaluation en fonction des quatre compétences de base. Des exemples des différents types d'évaluation tels que l'évaluation diagnostique (**ED**), l'évaluation formative (**EF**) et l'évaluation sommative (**ES**) sont suggérés dans la section **Déroulement de l'activité** des activités de cette unité.

## Sécurité

L'enseignant ou l'enseignante veille au respect des règles de sécurité du Ministère et du conseil scolaire.

## Ressources

Dans cette unité, l'enseignant ou l'enseignante utilise les ressources suivantes :

### Ouvrages généraux/de référence/de consultation

BARBEAU, E., *et al.*, *Five Hundred Mathematical Challenges*, Spectrum Series, Washington, éd. The Mathematical Association of America, 1995, 227 p.

LADOUCEUR, André, *Mathématiques discrètes*, Montréal, Les Éditions de la Chenelière, 1994, 358 p. \*\*\*

### Médias électroniques

*Le principe fondamental du dénombrement*, tfo, BPN 546702, coul., 10 min (série Analyse combinatoire).

*Les arrangements et les permutations*, tfo, BPN 546703, coul., 10 min (série Analyse combinatoire).

*Les combinaisons*, tfo, BPN 546704, coul., 10 min (série Analyse combinatoire).

## ACTIVITÉ 4.1 (MGA4U)

### Dénombrements et arrangements

#### Description

**Durée :** 240 minutes

Dans cette activité, l'élève résout des problèmes simples, qui font appel au principe du dénombrement, en formalisant ses connaissances intuitives. Elle ou il résout des problèmes d'arrangements, puis communique son raisonnement oralement et par écrit.

#### Domaines, attentes et contenus d'apprentissage

**Domaine :** Mathématiques discrètes

**Attente :** MGA4U-M-A.1

**Contenus d'apprentissage :** MGA4U-M-Tech.1 - 2 - 4 - 5

#### Notes de planification

- Préparer des cartons pour faire l'exercice de mise en situation.
- Se procurer la vidéo des émissions *Le principe fondamental du dénombrement* et *Les arrangements et les permutations* de la série «L'Analyse combinatoire» de tfo, puis réserver un téléviseur et un magnétoscope pour les visionner.
- Préparer les exemples et les exercices qui seront utilisés au cours de cette activité.

#### Déroulement de l'activité

##### Mise en situation

- Présenter à l'élève le problème ci-dessous, lui distribuer des cartons de couleurs appropriées pour représenter les drapeaux, lui demander de le résoudre et l'inviter à consulter ses pairs, au besoin.  
*Problème :*
  - On a deux drapeaux rouges, un drapeau bleu et un drapeau vert. Combien de signaux peut-on former en plaçant les drapeaux sur un mât?
- Faire une mise en commun d'idées et, au cours de celle-ci, indiquer les interprétations que l'on peut faire du problème (p. ex., Doit-on les placer tous les quatre ou peut-on en placer un, deux ou trois à la fois?). **(ED)**

## Expérimentation/Exploration/Manipulation

- Visionner avec l'élève les émissions intitulées *Le principe fondamental du dénombrement et Les arrangements et les permutations* de la série «L'Analyse combinatoire» de tfo.
- Discuter avec l'élève des concepts présentés dans ces deux émissions.
- Inviter l'élève à prendre un crayon, un stylo et une règle, à les aligner de gauche à droite, puis à compter le nombre d'arrangements qu'il est possible d'en faire.
- Proposer à l'élève d'autres problèmes simples à résoudre.
- Discuter avec l'élève des résultats obtenus. **(EF)**
- Présenter à l'élève le problème qui suit :

*Problème :*

- On veut se faire un sandwich. On a du pain blanc, du pain brun et du pain de seigle. De plus, on a du jambon, du poulet, du rôti de boeuf et du fromage. Combien de sortes de sandwichs peut-on se faire si on emploie une sorte de pain et une garniture à la fois?
- Animer une mise en commun pour connaître les résultats de l'élève, puis faire ressortir le principe du produit qui a été utilisé et généraliser ce principe. **(EF)**
- Présenter à l'élève quelques problèmes simples qui font appel aux principes élémentaires du dénombrement ainsi que des problèmes d'arrangements et lui laisser vérifier ses réponses auprès de ses pairs. **(EF)**

*Exemple :*

- Cinq élèves participent à une course. Combien de possibilités y a-t-il pour choisir les trois premiers, dans l'ordre? Combien de possibilités y a-t-il de choisir l'ordre d'arrivée des cinq élèves?
- Présenter à l'élève la définition d'un arrangement et celle d'une permutation.
- Présenter à l'élève quelques situations d'arrangements et de permutations, puis lui présenter les notations  $A_n^r$  et  $n!$

*Exemples :*

- On veut placer quatre livres sur un rayon d'une bibliothèque. Le nombre de façons de les placer est égal à  $4!$ .
- On veut écrire tous les nombres de quatre chiffres différents en n'employant que les chiffres 1, 2, 3, 4, 5 et 6. Le nombre de possibilités est égal à  $A_6^4$ .
- Présenter à l'élève quelques exercices qui portent sur le calcul de valeurs particulières de  $A_n^r$  et de  $n!$ , d'autres qui portent sur des arrangements et des permutations, y compris certains qui exigent l'examen de cas particuliers (p. ex., des cas où certains éléments doivent être côte à côte).

*Exemples :*

- Évaluer les expressions  $4!$ ,  $A_5^3$  et  $A_6^4$ .
- Combien peut-on former de nombres pairs de quatre chiffres différents en employant seulement les chiffres de 1 à 6?
- Combien y a-t-il de permutations des lettres du mot PORTES si la première lettre doit être une consonne et la dernière lettre doit être une voyelle?
- Combien y a-t-il de permutations des lettres du mot PORTES si les lettres P et O doivent paraître en positions adjacentes?

- Inviter l'élève à expliquer ses solutions de façon claire et précise ainsi qu'à vérifier ses réponses auprès de ses pairs. **(EF)**
- Faire une mise en commun d'idées sur les façons de traiter les arrangements qui exigent des cas particuliers, tout en incluant le principe de la somme. **(EF)**
- Présenter à l'élève un problème de permutations d'objets dont certains sont identiques et lui montrer la façon de le traiter (voir les exemples 1 à 3 aux pages 134 et 135 de *Mathématiques discrètes*).
- Présenter à l'élève, qui travaille en équipe de deux ou de trois, une variété de situations et de problèmes dont la solution ne fait pas toujours appel à une simple formule.  
*Exemples :*
  - Déterminer le nombre de mots de trois lettres que l'on peut former avec les lettres du mot ARBRE.
  - Déterminer le nombre de façons dans lesquels on peut asseoir cinq personnes autour d'une table ronde.
- Inviter un ou une élève à venir présenter sa solution au tableau ou sur un transparent. **(EF)**
- Demander à l'élève de distinguer entre une permutation et un arrangement, tout en fournissant des exemples à l'appui.

### **Évaluation sommative**

- Voir **Évaluation sommative** de l'activité 4.5.

### **Activités complémentaires/Réinvestissement**

- Présenter à l'élève la situation suivante :  
Le code Morse est un ensemble de signaux formés de un à quatre points ou tirets. Combien de signaux différents peut-on former avec le code Morse? Effectuer une recherche pour trouver le nombre de signaux qui sont employés dans le code Morse.

### **Annexes**

**(espace réservé à l'enseignant ou à l'enseignante pour l'ajout de ses propres annexes)**

## ACTIVITÉ 4.2 (MGA4U)

### Manipulations algébriques

#### Description

**Durée :** 120 minutes

Dans cette activité, l'élève utilise la notation factorielle pour simplifier ou évaluer des expressions numériques ou algébriques, résoudre des équations et prouver des identités.

#### Domaines, attentes et contenus d'apprentissage

**Domaine :** Mathématiques discrètes

**Attente :** MGA4U-M-A.1

**Contenus d'apprentissage :** MGA4U-M-Tech.2 - 3

#### Notes de planification

- Préparer les exemples et les exercices qui seront utilisés au cours de cette activité.

#### Déroulement de l'activité

##### Mise en situation

- Présenter à l'élève l'expression  $\frac{42!}{37!}$  en lui indiquant que celle-ci permet de calculer le nombre total de possibilités d'avoir la bonne combinaison si on tire cinq nombres parmi un ensemble de 42 nombres différents.
- Inviter l'élève à effectuer le calcul.

##### Expérimentation/Exploration/Manipulation

- Présenter à l'élève quelques expressions numériques qui comprennent le symbole de factorielle, p. ex.,  $\frac{25!}{23!}$  et  $\frac{30!}{15!} \times \frac{14!}{28!}$ , puis lui demander de les évaluer.
- Faire la correction de ces exercices au tableau et veiller à expliquer clairement toutes les étapes du raisonnement. **(EF)**
- Montrer à l'élève la façon d'évaluer des expressions qui comprennent le symbole de factorielle à l'aide de sa calculatrice scientifique.

- Demander à l'élève d'expliquer la raison pour laquelle les expressions ci-après sont des identités :  $n! = n(n-1)!$ ,  $n! = n(n-1)(n-2)!$ .
- Animer une mise en commun d'idées sur le sens de ces identités et, au besoin, fournir des exemples numériques, p. ex.,  $10! = 10 \times 9!$ ,  $10! = 10 \times 9 \times 8!$ . **(EF)**
- Demander à l'élève de développer une formule pour  $A_n^r$  en généralisant en partant d'exemples comme  $A_{10}^4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7$  et  $A_8^3 = 8 \times 7 \times 6$ , ce qui devrait donner  $A_n^r = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$ .
- Demander à l'élève de montrer, à l'aide d'exemples numériques, que  $A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$ .
- Inviter l'élève à montrer l'équivalence des deux formules de façon algébrique.
- Inviter un ou une élève à venir faire la démonstration de cette équivalence au tableau. **(EF)**
- Présenter à l'élève, qui travaille en équipe de quatre, divers exercices où elle ou il doit manipuler la notation factorielle et les formules, tout en évaluant des expressions numériques (voir *Mathématiques discrètes*, p. 132 et 133, exercices 5-3).
- Remettre les réponses à l'élève pour lui permettre de s'autocorriger. **(EF)**
- Présenter à l'élève des égalités qui proviennent d'identités, puis lui demander de les montrer en partant d'un membre de l'égalité, en manipulant l'expression et en aboutissant à l'expression de l'autre membre.

*Exemple :*

- Montrer, en manipulant, que  $A_{20}^4 + A_{19}^4 = 2A_{19}^2 A_{18}^2$ .

$$\begin{aligned}
 \text{M.G.} &= A_{20}^4 + A_{19}^4 \\
 &= (20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17) + (19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16) \\
 &= (20+16) \times (19 \cdot 18 \cdot 17) \\
 &= (2 \cdot 18) \times (19 \cdot 18 \cdot 17) \\
 &= 2 \times (19 \cdot 18) \times (18 \cdot 17) \\
 &= 2A_{19}^2 A_{18}^2 \\
 &= \text{M.D.}
 \end{aligned}$$

- Demander à l'élève de faire vérifier son travail auprès de ses pairs. **(EF)**
- Demander à l'élève de montrer des identités qui comprennent les symboles  $n!$  et  $A_n^r$ , puis de faire vérifier son travail auprès de ses pairs. **(EF)**

### Évaluation sommative

- Voir **Évaluation sommative** de l'activité 4.5.

### Activités complémentaires/Réinvestissement

- Présenter à l'élève le problème ci-dessous et lui demander de présenter un argument complet pour appuyer sa solution.

*Problème :*

- Si on développe le nombre  $100!$  au long, combien y aura-t-il de zéros au bout à droite?

## **Annexes**

**(espace réservé à l'enseignant ou à l'enseignante pour l'ajout de ses propres annexes)**

## ACTIVITÉ 4.3 (MGA4U)

### Combinaisons

#### Description

**Durée :** 300 minutes

Dans cette activité, l'élève fait appel à la notion de combinaison et à la notation associée pour résoudre des problèmes tout en présentant une démarche claire et précise.

#### Domaines, attentes et contenus d'apprentissage

**Domaine :** Mathématiques discrètes

**Attente :** MGA4U-M-A.1

**Contenus d'apprentissage :** MGA4U-M-Tech.2 - 3 - 4 - 5

#### Notes de planification

- Se procurer la vidéo de l'émission *Les combinaisons*, tirée de la série «L'Analyse combinatoire» de tfo, puis réserver un téléviseur et un magnétoscope pour le visionner.
- Préparer les exemples et les exercices qui seront utilisés au cours de cette activité.

#### Déroulement de l'activité

##### Mise en situation

- Visionner avec l'élève l'émission *Les combinaisons* de la série «L'Analyse combinatoire» de tfo pour présenter cette nouvelle notion.
- Faire une mise en commun d'idées des nouveaux concepts présentés dans cette émission. **(ED)**
- Former des équipes de quatre et inviter chacune d'elles à inventer un exercice simple qui porte sur les nouveaux concepts présentés dans l'émission.
- Animer une mise en commun d'idées pour permettre à chaque équipe de présenter son exercice. **(ED)**

## Expérimentation/Exploration/Manipulation

### Combinaisons

- Présenter à l'élève, qui travaille en équipe de quatre, le problème qui suit :

#### Problème :

- Il y a cinq drapeaux, de couleurs différentes, dans un magasin. On veut en acheter trois pour les apporter à un défilé. Combien de choix peut-on faire?
- Faire une mise en commun d'idées au cours de laquelle on invite l'élève à comparer ses résultats à ceux de ses pairs. **(EF)**
- Présenter à l'élève le problème ci-dessous et lui demander de le comparer au problème précédent :

#### Problème :

- On a cinq drapeaux de couleurs différentes. Combien peut-on faire de signaux différents en alignant trois des drapeaux sur un mât?
- Demander à l'élève de faire une liste organisée des signaux possibles en utilisant les lettres suivantes : B (bleu), R (rouge), V (vert), O (orangé), M (mauve), ce qui devrait donner :  
BRV, BVR, RBV, RVB, VBR, VRB  
BRO, BOR, RBO, ROB, OBR, ORB  
BRM, BMR, RBM, RMB, MBR, MRB  
BVO, BOV, VBO, VOB, OBV, OVB  
BVM, BMV, VBM, VMB, MBV, MVB  
BOM, BMO, OBM, OMB, MBO, MOB  
RVO, ROV, VRO, VOR, ORV, OVR  
RVM, RMV, VRM, VMR, MRV, MVR  
ROM, RMO, ORM, OMR, MRO, MOR  
VOM, VMO, OVM, OMV, MVO, MOV
- Demander à l'élève de comparer le nombre d'arrangements de cinq objets, choisis trois à trois, soit 60, au nombre de combinaisons de cinq objets, choisis trois à trois, soit 10, et d'établir la relation entre les deux résultats en comparant le nombre de lignes de la liste pour montrer que, dans cet exemple, le nombre d'arrangements est égal au nombre de combinaisons  $\times 3!$ .
- Présenter à l'élève un autre exemple semblable, puis l'inviter à établir la relation entre le nombre de combinaisons et le nombre d'arrangements, sans avoir à dresser une liste.
- Présenter à l'élève la notation  $\binom{n}{r}$  et développer la relation entre  $\binom{n}{r}$  et  $A_n^r$  ainsi que la formule  $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$  qui en découle (voir les exemples 2 et 3 à la page 149 de *Mathématiques discrètes*).
- Présenter à l'élève plusieurs exercices où il faut évaluer, avec et sans calculatrice, des expressions qui contiennent  $\binom{n}{r}$ , puis lui permettre de vérifier ses réponses auprès de ses pairs. **(EF)**

*Exemple :*

- Évaluer les expressions en les simplifiant d'abord, puis en utilisant les touches

spécialisées de la calculatrice :  $\binom{10}{4}, \binom{6}{3}, \binom{15}{3}$ .

- Présenter à l'élève quelques exercices qui comportent des situations d'arrangements ou de combinaisons, lui demander de les résoudre, tout en présentant des solutions claires et précises, puis l'inviter à vérifier ses réponses auprès de ses pairs (voir les exercices de 6-1, p. 151 à 155 dans *Mathématiques discrètes*).

*Exemples :*

- Un groupe-classe de 28 élèves doit élire un comité de trois membres pour le représenter au conseil des élèves. De combien de façons peut-il choisir les trois membres? De combien de façons peut-il choisir un comité aux postes de présidence, vice-présidence et secrétaire?
- Cinq personnes se rencontrent et se serrent la main. Combien y a-t-il eu de serremments de main? **(EF)**
- Demander à l'élève de distinguer les concepts d'arrangement, de permutation et de combinaison en donnant un exemple à l'appui, ce qui lui permet de vérifier son degré de compréhension. **(O)**

### *Manipulations algébriques*

- Demander à l'élève d'évaluer des expressions numériques qui contiennent  $n!$ ,  $A_n^r$  et  $\binom{n}{r}$  en les traitant de façon algébrique, puis l'inviter à vérifier ses réponses au moyen de la calculatrice. **(EF)**

*Exemple :*

- Évaluer les expressions ci-après en n'utilisant la calculatrice qu'à la fin :

$$\frac{\binom{40}{4}}{\binom{38}{4}}, \frac{\binom{40}{12} - \binom{40}{11}}{\binom{38}{26}}$$

- Demander à l'élève de prouver que  $\binom{15}{4} + \binom{15}{5} = \binom{16}{5}$  en manipulant le membre de gauche en utilisant la notation factorielle.
- Donner à l'élève d'autres cas particuliers de l'identité  $\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$  à montrer de façon algébrique et, ensuite, lui demander de prouver l'identité elle-même ainsi que des variations de l'identité, comme  $\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r}$  (cette identité est nécessaire pour montrer la formule du binôme), puis, enfin, l'inviter à faire vérifier son travail par ses pairs. **(EF)**

- Demander à l'élève de montrer l'identité de Pascal sous diverses formes,  
p. ex.,  $\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r}$ ,  $\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \binom{n}{r}$  ou  $\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$ .
- Demander à l'élève de montrer diverses identités qui contiennent le symbole  $\binom{n}{r}$ , puis de faire vérifier son travail par ses pairs. **(EF)**

### Évaluation sommative

- Voir **Évaluation sommative** de l'activité 4.5.

### Activités complémentaires/Réinvestissement

- Présenter à l'élève le problème ci-après et lui demander de le résoudre en cherchant une régularité, puis en utilisant le fait qu'un rectangle est formé chaque fois que l'on choisit deux côtés verticaux et deux côtés horizontaux :  
*Problème :*
- Déterminer le nombre de rectangles que l'on peut retrouver sur un échiquier.

### Annexes

(espace réservé à l'enseignant ou à l'enseignante pour l'ajout de ses propres annexes)

## ACTIVITÉ 4.4 (MGA4U)

### Combinaisons avec objets identiques

#### Description

**Durée :** 300 minutes

Dans cette activité, l'élève fait appel à ses connaissances de combinatoire pour résoudre différents problèmes, y compris des situations où certains objets sont identiques.

#### Domaines, attentes et contenus d'apprentissage

**Domaine :** Mathématiques discrètes

**Attente :** MGA4U-M-A.1

**Contenus d'apprentissage :** MGA4U-M-Tech.4 - 5

#### Notes de planification

- Préparer les exemples et les exercices qui seront utilisés au cours de cette activité.
- Apporter un nombre suffisant de pièces de 10 ¢, de 5 ¢ et de 1 ¢ pour chaque équipe.

#### Déroulement de l'activité

##### Mise en situation

- Demander à l'élève, qui travaille avec un ou une partenaire, de résoudre le problème suivant :  
*Problème :*
  - Si on utilise un jeu de cartes régulier, combien de mains de cinq cartes, qui contiennent au moins deux as, peut-on former?
- Animer un échange sur les diverses façons de résoudre ce problème, qui exige l'examen de cas distincts, et comparer les mérites de le résoudre par addition (les mains qui comptent respectivement deux, trois ou quatre as) ou de le résoudre par soustraction (les mains sans distinction et les mains qui ne comptent aucun as ou qu'un seul as). **(ED)**

##### Expérimentation/Exploration/Manipulation

###### *Problèmes qui exigent plus d'une étape*

- Présenter à l'élève, qui travaille avec un ou une partenaire, des problèmes qui font appel au principe du produit ainsi qu'aux combinaisons et lui demander de faire vérifier son travail par ses pairs. **(EF)**

*Exemple :*

- S'il y a 14 garçons et 18 filles dans le groupe-classe, combien y a-t-il de combinaisons possibles de choisir un comité composé de 3 garçons et de 3 filles?
- Animer une mise en commun d'idées sur la communication exigée pour résoudre de tels problèmes et mettre l'accent sur la nécessité de justifier son travail. **(EF)**
- Présenter à l'élève, qui travaille en équipe de deux ou trois, des problèmes de combinatoire qui exigent plus d'une étape (voir *Mathématiques discrètes*, pages 163-166).
- Inviter l'élève à transcrire sa solution au tableau ou sur un transparent, puis à l'expliquer au groupe-classe. **(EF)**

*Problèmes faisant appel à des objets identiques*

- Jumeler l'élève.
- Remettre à chaque équipe cinq pièces de 10 ¢, quatre pièces de 5 ¢ et trois pièces de 1 ¢, puis lui demander de calculer le nombre de façons de choisir au moins une pièce.
- Présenter à l'élève une façon formelle de résoudre le problème qui précède (voir *Mathématiques discrètes*, p. 167).
- Présenter à l'élève d'autres problèmes semblables, lui demander de les résoudre seul, puis de vérifier la justesse de ses réponses auprès de ses pairs. **(EF)**
- Présenter à l'élève des problèmes différents qui font appel à d'autres stratégies (voir *Mathématiques discrètes*, pages 168-172), et lui montrer les stratégies employées.

*Exemples :*

- Combien de diviseurs le nombre 2700 admet-il?

*Solution*

La factorisation première de 2700 est  $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$ .

Les diviseurs de 2700 sont 1 et n'importe quel produit de certains facteurs premiers. Par exemple,  $2 \cdot 3^2$ ,  $2 \cdot 3 \cdot 5$  et  $3^3 \cdot 5$  sont des diviseurs de 2700.

On peut donc former un diviseur de 2700 en formant n'importe quel nombre de la forme  $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ , où  $a = 0, 1$  ou  $2$ ,  $b = 0, 1, 2$  ou  $3$  et  $c = 0, 1$  ou  $2$ .

On peut donc choisir  $a = 0, 1$  ou  $2$ , ce qui fait 3 choix.

Dans chaque cas, on peut choisir  $b = 0, 1, 2$  ou  $3$ , ce qui fait 4 choix.

Dans chaque cas, on peut choisir  $c = 0, 1$  ou  $2$ , ce qui fait 3 choix.

Selon le principe du produit, le nombre total de choix est égal à  $3 \times 4 \times 3$ , ou 36.

Le nombre 2700 admet donc 36 diviseurs.

- Lors d'une fête, combien y a-t-il de façons de distribuer 10 ballons identiques à quatre enfants, Ana, Benoît, Clara et Yacin, de manière que chacun en reçoive au moins un?

*Solution*

On imagine les 10 ballons alignés : B B B B B B B B B B.

On peut représenter une distribution en insérant trois barres obliques entre les ballons, de sorte que le premier groupe de ballons va à Ana, le deuxième à Benoît, le troisième à Clara et le quatrième à Yacin. Par exemple, B B/B B B/B/B B B B indique qu'Ana a reçu deux ballons, Benoît en a reçu trois, Clara en a reçu un et Yacin en a reçu quatre.

Le nombre de façons de distribuer les ballons est donc équivalent au nombre de façons d'insérer trois barres obliques dans neuf espaces entre les lettres. Ce nombre est égal

à  $\binom{9}{3}$  ou 84.

- Présenter à l'élève, qui travaille avec un ou une partenaire, une variété de situations où il faut résoudre des problèmes de permutation et de combinaison, y compris des situations qui exigent l'examen de plusieurs cas, puis l'inviter à expliquer ses solutions de façon claire et précise (voir *Mathématiques discrètes*, pages 172-174).
- Inviter l'élève à corriger son travail à l'aide des pairs ou demander à un ou à une élève de venir écrire sa solution au tableau et de l'expliquer. **(EF)**
- Demander à l'élève de dresser une liste des concepts acquis depuis le début de l'unité. **(O)**

### **Évaluation sommative**

- Voir **Évaluation sommative** de l'activité 4.5.

### **Activités complémentaires/Réinvestissement**

- Demander à l'élève d'effectuer une recherche sur l'emploi que faisaient de la combinatoire certains pionniers de la probabilité, comme le Chevalier de Méré et Girolamo Cardano, puis d'en faire une présentation au groupe-classe.

### **Annexes**

**(espace réservé à l'enseignant ou à l'enseignante pour l'ajout de ses propres annexes)**

## ACTIVITÉ 4.5 (MGA4U)

### Résolution de problèmes 4

#### Description

**Durée :** 300 minutes

Dans cette activité, l'élève résout une variété de problèmes qui font appel aux notions acquises tout le long du cours. L'activité lui permet de parfaire ses connaissances, son savoir-faire et ses compétences.

#### Domaines, attentes et contenus d'apprentissage

**Domaine :** Démonstrations et résolution de problèmes

**Attentes :** MGA4U-D-A.2 - 3

**Contenus d'apprentissage :** MGA4U-D-Stra.1 - 2 - 3 - 4  
MGA4U-D-Prob.1 - 2 - 3

#### Notes de planification

- S'assurer d'avoir à portée de la main la série de problèmes préparés lors de l'activité 1.5.
- Choisir, pour les utiliser au cours de cette activité, des problèmes qui portent sur une variété de sujets tels que l'algèbre, la trigonométrie, la géométrie plane, la géométrie dans l'espace, les suites, la théorie des nombres et la combinatoire.
- Choisir quelques problèmes de grande portée et quelques situations qui permettent à l'élève de découvrir des propriétés géométriques à l'aide de *Cybergéomètre*, puis de les prouver en présentant une démonstration déductive.
- Préparer une tâche d'évaluation sommative qui porte sur l'unité 4.

#### Déroulement de l'activité

##### Mise en situation

- Présenter à l'élève le problème qui suit :  
On considère un triangle  $ABC$  dans lequel  $ab^2 \cos A = bc^2 \cos B = ca^2 \cos C$ .  
Montrer que le triangle est équilatéral.  
(tiré de *Problems, Problems, Problems*, vol. 3, page 52)
- Suggérer à l'élève, au besoin, des stratégies telles que :
  - procéder à rebours;
  - faire appel à la loi du cosinus;
  - tracer des hauteurs pour obtenir des triangles rectangles.

- Animer une mise en commun d'idées sur la résolution du problème et sur les stratégies qui ont été utilisées avec ou sans succès. (ED)

Exemples :

- Tenter de montrer que si  $ab^2 \cos A = bc^2 \cos B = ca^2 \cos C$ , alors le triangle  $ABC$  est équilatéral et vérifier si les étapes sont réversibles.

- Faire appel à la loi du cosinus, d'où  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ ,  $\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$  et

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}. \text{ La double égalité devient}$$

$$\text{alors } ab^2 \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = bc^2 \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = ca^2 \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \text{ ou}$$

$$\frac{ab}{c} (b^2 + c^2 - a^2) = \frac{bc}{a} (c^2 + a^2 - b^2) = \frac{ca}{b} (a^2 + b^2 - c^2).$$

On multiplie chaque membre pour obtenir

$$a^2 b^2 (b^2 + c^2 - a^2) = b^2 c^2 (c^2 + a^2 - b^2) = c^2 a^2 (a^2 + b^2 - c^2).$$

On considère chaque égalité séparément pour

$$\text{obtenir } a^2 b^2 (b^2 + c^2 - a^2) = b^2 c^2 (c^2 + a^2 - b^2) \text{ et}$$

$$b^2 c^2 (c^2 + a^2 - b^2) = c^2 a^2 (a^2 + b^2 - c^2).$$

On développe, on simplifie et on factorise pour obtenir  $b^2 = c^2$  et  $c^2 = a^2$ , ce qui montre que le triangle est équilatéral.

- Voir *Problems, Problems, Problems*, vol. 3, p. 177 pour une deuxième solution qui fait appel aux trois hauteurs du triangle.

### Expérimentation/Exploration/Manipulation

- Présenter à l'élève, qui travaille en équipe de quatre, des problèmes variés, puis lui suggérer un nombre de problèmes à résoudre chaque jour, tout en mettant l'accent sur la présentation, la justification et la communication.

Exemples :

- Problème de difficulté moyenne (tiré de *Five Hundred Mathematical Challenges*, page 1).

On remarque que :

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

$$5^2 + 12^2 = 13^2$$

$$7^2 + 24^2 = 25^2$$

$$9^2 + 40^2 = 41^2$$

Observer les régularités et généraliser pour obtenir une loi, puis montrer la loi.

*Remarques :*

- La suite 3, 5, 7, 9, ... est arithmétique. Si on observe les deuxièmes différences, les suites 4, 12, 24, 40, ... et 5, 13, 25, 41, ... sont définies par des fonctions du second degré. On obtient la généralisation  $(2n+1)^2 + (2n^2 + 2n)^2 = (2n^2 + 2n + 1)^2$ ,  
 $n = 1, 2, 3, \dots$

On peut montrer qu'il s'agit d'une identité en développant et en simplifiant chaque membre.

- Problème de difficulté moyenne (tiré de *Problems, Problems, Problems*, vol. 5, page 34). Déterminer la valeur de l'expression :

$$(1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 99^2) - (2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 100^2) + (4 + 8 + 12 + \dots + 200).$$

*Remarques :*

- On peut faire appel à un problème plus simple et chercher une régularité, par exemple en observant que :

$$(1^2) - (2^2) + (4) = 1$$

$$(1^2 + 3^2) - (2^2 + 4^2) + (4 + 8) = 2$$

$$(1^2 + 3^2 + 5^2) - (2^2 + 4^2 + 6^2) + (4 + 8 + 12) = 3$$

- On peut observer que les termes correspondants des deux premières parenthèses forment des différences de carré.

$$\begin{aligned} & - \left[ (2^2 - 1^2) + (4^2 - 3^2) + (6^2 - 5^2) + \dots + (100^2 - 99^2) \right] + (4 + 8 + 12 + \dots + 200) \\ &= -[3 + 7 + 11 + \dots + 199] + (4 + 8 + 12 + \dots + 200) \\ &= (4 - 3) + (8 - 7) + (12 - 11) + \dots + (200 - 199) \\ &= 1 + 1 + 1 + \dots + 1 \\ &= 50 \end{aligned}$$

- On peut comparer la validité de chacune des approches.
- On peut demander à l'élève de généraliser le résultat en fonction de  $n$  et de le montrer à l'aide du raisonnement par récurrence.

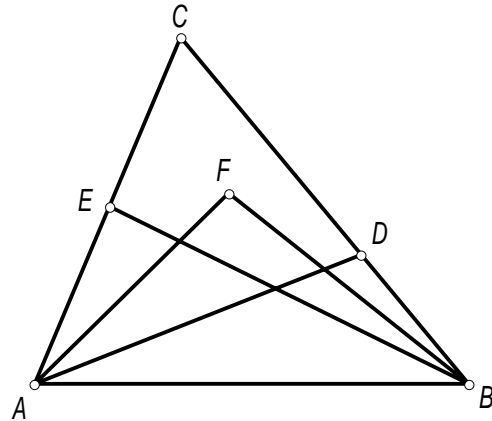
- Problème de difficulté moyenne (tiré de *Problems, Problems, Problems*, vol. 5, page 36). Soit quatre points  $A(0, 0, 0)$ ,  $B(0, 2, 0)$ ,  $C(2, 0, 0)$  et  $D(a, b, c)$ . Soit  $W$  le milieu de  $\overline{AB}$ ,  $X$  le milieu de  $\overline{BC}$ ,  $Y$  le milieu de  $\overline{CD}$  et  $Z$  le milieu de  $\overline{DA}$ . Montrer que les points  $W$ ,  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  sont situés dans un même plan.

- Animer des mises en commun d'idées, au besoin. **(EF)**
- Présenter à l'élève un problème de géométrie où il faut utiliser *Cybergéomètre* pour découvrir une propriété géométrique, puis, par la suite, la montrer. **(T)**

Exemple :

Soit un triangle  $ABC$ ,  $D$  un point quelconque sur le côté  $BC$  et  $E$  un point quelconque sur le côté  $AC$ . Soit  $F$  le point d'intersection des bissectrices des angles  $CAD$  et  $CBE$ .

1. Découvrir une relation entre les mesures des angles  $ADB$ ,  $AEB$  et  $AFB$ .
2. Montrer la relation.



Remarque :

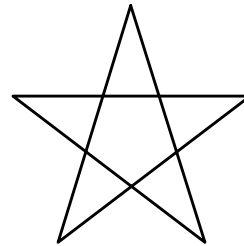
- On découvrira que  $\angle ADB + \angle AEB = 2\angle AFB$ .

- Faire des mises en commun d'idées sur les stratégies employées, comparer ces stratégies quant à leur efficacité ou à leur facilité et demander à l'élève ce qui a suscité leur emploi. **(EF)**
- Demander à l'élève de dresser une liste de tactiques ou de stratégies qui peuvent être utiles lorsqu'on ne parvient pas à commencer la résolution d'un problème.
- Assigner à l'élève, qui travaille en équipe de quatre, un ou deux problèmes de grande portée et, au besoin, lui faire des suggestions. **(EF)**

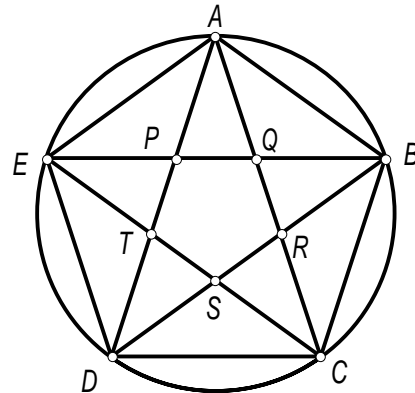
Exemple :

- Problème à grande portée

Les disciples de Pythagore se réunissaient en secret pour faire leurs leçons. Leur symbole secret était le pentagone étoilé. On peut l'inscrire dans un pentagone régulier qui est lui-même inscrit dans un cercle.



1. Montrer que  $\frac{AD}{AT} = \frac{AT}{TD}$  (ce rapport est appelé le nombre d'or).
2. Montrer que, dans le triangle  $ACD$ , le rapport  $\frac{AD}{CD}$  est égal au nombre d'or.
3. Montrer, que dans le triangle  $ABE$ , le rapport  $\frac{BE}{AB}$  est égal au nombre d'or.



Remarques :

- On peut montrer que les angles intérieurs du pentagone  $ABCDE$  mesurent chacun  $108^\circ$ .
- En utilisant les petits triangles isocèles  $ABQ$  et  $AEP$ , on peut montrer que les diagonales  $AD$  et  $AC$  divisent l'angle  $BAE$  en trois angles congrus de  $36^\circ$ . Il en est de même des autres angles.
- En montrant l'existence d'angles supplémentaires dans le quadrilatère  $ABCT$ , on peut montrer qu'il s'agit d'un parallélogramme et même d'un losange.
- On a donc  $AB = BC = CD = DE = EA = b$ ,  
 $AR = AT = BP = BS = CQ = CT = DR = DP = ES = EQ = b$  et  
 $AC = BD = CE = DA = EB = a$ .
- On doit montrer que  $\frac{AD}{AT} = \frac{AT}{TD}$ , c'est-à-dire que  $\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}$ , ce que l'on peut obtenir en comparant les côtés des triangles isocèles semblables  $AEP$  et  $ADE$ .
- Les deux autres résultats découlent directement du premier.
- On peut montrer que si  $r$  est le rayon du cercle circonscrit, alors  $a = \frac{r}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$  et  
 $b = \frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ .
- Inviter l'élève à faire un retour sur les différents concepts étudiés en lui remettant la grille d'évaluation adaptée préparée pour faire la tâche d'évaluation de cette unité. (O)
- Faire passer à l'élève une tâche d'évaluation sommative qui porte sur les activités de l'unité 4. (ES)

### Évaluation sommative

- Présenter à l'élève une tâche d'évaluation sommative portant sur la combinatoire ainsi que sur la résolution de problèmes à l'aide d'un test papier-crayon et en utilisant une grille d'évaluation adaptée qui comporte des critères de rendement précis en fonction des quatre compétences. L'élève doit pouvoir :
  - Connaissance et compréhension
    - démontrer une connaissance des principes de la combinatoire;
    - démontrer une connaissance de la notation et des symboles propres à la combinatoire;
    - évaluer des expressions qui font appel à la notation factorielle.
  - Réflexion, recherche et résolution de problèmes
    - choisir les stratégies appropriées pour montrer des identités et résoudre divers problèmes.
  - Communication
    - présenter les étapes de son raisonnement;
    - utiliser la langue, la terminologie et les symboles appropriés.
  - Mise en application
    - appliquer les concepts et les procédés de la combinatoire pour résoudre des problèmes qui nécessitent plus d'une étape.

### **Activités complémentaires/Réinvestissement**

- Présenter à l'élève des problèmes tirés de concours de mathématiques reconnus.

### **Annexes**

**(espace réservé à l'enseignant ou à l'enseignante pour l'ajout de ses propres annexes)**

Annexe MGA4U 4.5.1 : Grille d'évaluation adaptée - Combinatoire et résolution de problèmes

## Grille d'évaluation adaptée - Combinatoire et résolution de problèmes

<i>Type d'évaluation : diagnostique <input type="checkbox"/> formative <input type="checkbox"/> sommative <input checked="" type="checkbox"/></i>				
<i>Compétences et critères</i>	<i>50 - 59 % Niveau 1</i>	<i>60 - 69 % Niveau 2</i>	<i>70 - 79 % Niveau 3</i>	<i>80 - 100 % Niveau 4</i>
<i>Connaissance et compréhension</i>				
L'élève : - démontre une connaissance des principes de combinatoire. - démontre une connaissance de la notation et des symboles propres à la combinatoire. - évalue des expressions qui font appel à la notation factorielle.	L'élève démontre une <b>connaissance et une compréhension limitées</b> des concepts, et exécute <b>uniquement</b> des algorithmes <b>simples</b> .	L'élève démontre une <b>connaissance et une compréhension partielles</b> des concepts, et exécute des algorithmes <b>avec une certaine exactitude</b> .	L'élève démontre une <b>connaissance et une compréhension générales</b> des concepts, et exécute des algorithmes <b>avec exactitude</b> .	L'élève démontre une <b>connaissance et une compréhension approfondies</b> des concepts, choisit l'algorithme <b>le plus efficace</b> et l'exécute <b>avec exactitude</b> .
<i>Réflexion, recherche et résolution de problèmes</i>				
L'élève : - choisit les stratégies appropriées pour montrer des identités et résoudre divers problèmes.	L'élève utilise une stratégie <b>non convenable et s'arrête en chemin, tout en montrant une compréhension de certains concepts</b> .	L'élève utilise une stratégie <b>non convenable et poursuit son travail jusqu'à la fin</b> .	L'élève utilise une stratégie <b>convenable, tout en commettant une erreur majeure</b> .	L'élève utilise une stratégie <b>convenable</b> et obtient une réponse, <b>en commettant rarement des erreurs mineures de calcul ou de copiage de données</b> .
<i>Communication</i>				
L'élève : - utilise la terminologie et les symboles propres aux mathématiques. - présente et justifie les étapes de son raisonnement.	L'élève utilise <b>rarement</b> la langue, les symboles, les diagrammes et les conventions propres aux mathématiques et présente et justifie <b>rarement</b> les étapes de son raisonnement de façon cohérente.	L'élève utilise <b>parfois</b> la langue, les symboles, les diagrammes et les conventions propres aux mathématiques et présente et justifie <b>parfois</b> les étapes de son raisonnement de façon cohérente.	L'élève utilise <b>souvent</b> la langue, les symboles, les diagrammes et les conventions propres aux mathématiques et présente et justifie <b>souvent</b> les étapes de son raisonnement de façon cohérente.	L'élève utilise <b>presque toujours</b> la langue, les symboles, les diagrammes et les conventions propres aux mathématiques et présente et justifie <b>presque toujours</b> les étapes de son raisonnement de façon cohérente.

**Mise en application**

L'élève : - applique des concepts et des procédés de la combinatoire pour résoudre des problèmes qui nécessitent plus d'une étape.	L'élève applique des concepts et des procédés de la combinatoire pour résoudre des problèmes <b>simples dans des contextes familiers.</b>	L'élève applique des concepts et des procédés de la combinatoire pour résoudre des problèmes <b>d'une certaine complexité dans des contextes familiers.</b>	L'élève applique <b>généralement</b> des concepts et des procédés de la combinatoire pour résoudre des problèmes <b>complexes dans des contextes familiers et peu familiers.</b>	L'élève applique <b>presque toujours</b> des concepts et des procédés de la combinatoire pour résoudre des problèmes <b>complexes dans des contextes familiers et peu familiers.</b>
---	---	---	--	--

Remarque : L'élève dont le rendement est en deçà du niveau 1 (moins de 50 %) n'a pas satisfait aux attentes pour cette tâche.



## APERÇU GLOBAL DE L'UNITÉ 5 (MGA4U)

### Formule du binôme

#### Description

**Durée :** 18 heures

Cette unité porte sur la formule du binôme et le raisonnement par récurrence. L'élève développe le binôme à l'aide du triangle arithmétique de Pascal et des notions de combinatoire, résout des problèmes qui ont trait au développement du binôme, puis montre diverses propositions à l'aide du raisonnement par récurrence.

#### Domaines, attentes et contenus d'apprentissage

**Domaines :** Démonstrations et résolution de problèmes, Mathématiques discrètes

**Attentes :** MGA4U-D-A.2 - 3  
MGA4U-M-A.1 - 2

**Contenus d'apprentissage :** MGA4U-D-Stra.1 - 2 - 4  
MGA4U-D-Prob.1 - 2 - 3  
MGA4U-M-Tech.6 - 7  
MGA4U-M-Rai.1 - 2 - 3 - 4 - 5

#### Titres des activités

#### Durée

<b>Activité 5.1 :</b> Développement du binôme à l'aide du triangle de Pascal	120 minutes
<b>Activité 5.2 :</b> Développement du binôme à l'aide de $\binom{n}{r}$	180 minutes
<b>Activité 5.3 :</b> Raisonnement par récurrence	300 minutes
<b>Activité 5.4 :</b> Relations associées au triangle de Pascal	180 minutes
<b>Activité 5.5 :</b> Résolution de problèmes 5	300 minutes

#### Liens

L'enseignant ou l'enseignante prévoit l'établissement de liens entre le contenu du cours et l'animation culturelle (**AC**), la technologie (**T**), les perspectives d'emploi (**PE**) et les autres matières (**AM**) au moment de sa planification des stratégies d'enseignement et d'apprentissage. Des suggestions pratiques sont intégrées dans la section **Déroulement de l'activité** des activités de cette unité.

## Mesures d'adaptation pour répondre aux besoins des élèves

L'enseignant ou l'enseignante doit planifier des mesures d'adaptation pour répondre aux besoins des élèves en difficulté et de celles et ceux qui suivent un cours d'ALF/PDF ainsi que des activités de renforcement et d'enrichissement pour tous les élèves. L'enseignant ou l'enseignante trouvera plusieurs suggestions pratiques dans *La boîte à outils*, p. 11-21.

## Évaluation du rendement de l'élève

L'évaluation fait partie intégrante de la dynamique pédagogique. L'enseignant ou l'enseignante doit donc planifier et élaborer en même temps les activités d'apprentissage et les étapes de l'évaluation en fonction des quatre compétences de base. Des exemples des différents types d'évaluation tels que l'évaluation diagnostique (**ED**), l'évaluation formative (**EF**) et l'évaluation sommative (**ES**) sont suggérés dans la section **Déroulement de l'activité** des activités de cette unité.

## Sécurité

L'enseignant ou l'enseignante veille au respect des règles de sécurité du Ministère et du conseil scolaire.

## Ressources

Dans cette unité, l'enseignant ou l'enseignante utilise les ressources suivantes :

### Ouvrages généraux/de référence/de consultation

ANDERSON, E., *et al.*, *Algèbre et géométrie*, Montréal, Les Éditions de la Chenelière, 1993, 393 p. \*\*\*

EGSGARD, J., *et al.*, *Mathématiques discrètes*, Saint-Laurent, Éditions du Trécarré, 1989, 422 p. \*\*\*

LADOUCEUR, André, *Mathématiques discrètes*, Montréal, Les Éditions de la Chenelière, 1994, 358 p. \*\*\*

### Médias électroniques

*Le théorème du binôme*, tfo, BPN 546705, coul., 10 min (série Analyse combinatoire).

## ACTIVITÉ 5.1 (MGA4U)

### Développement du binôme à l'aide du triangle de Pascal

#### Description

**Durée :** 120 minutes

Dans cette activité, l'élève détermine, par découverte, les éléments du triangle arithmétique de Pascal pour les relier aux coefficients du développement du binôme.

#### Domaines, attentes et contenus d'apprentissage

**Domaine :** Mathématiques discrètes

**Attente :** MGA4U-M-A.1

**Contenu d'apprentissage :** MGA4U-M-Tech.6

#### Notes de planification

- Préparer les exemples et les exercices qui seront utilisés au cours de cette activité.

#### Déroulement de l'activité

##### Mise en situation

- Présenter à l'élève le problème 16, à la page 184 de *Mathématiques discrètes*, qui porte sur le nombre de trajets que l'on peut emprunter pour parcourir un chemin en suivant un nombre de rues horizontales ou verticales, puis lui demander de le résoudre.
- Animer une mise en commun d'idées et montrer à l'élève la façon d'additionner les nombres de trajets menant à deux coins de rue pour déterminer le nombre de trajets menant à un coin suivant. (ED)

##### Expérimentation/Exploration/Manipulation

- Demander à l'élève de développer les expressions  $(a + b)^1$ ,  $(a + b)^2$ ,  $(a + b)^3$ ,  $(a + b)^4$  et  $(a + b)^5$ , puis lui demander de comparer les coefficients des termes aux nombres obtenus dans la mise en situation.
- Présenter à l'élève les six premières lignes du triangle arithmétique de Pascal ( $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ ) et lui demander de les transcrire sur une feuille à part.
- Demander à l'élève de déterminer les deux lignes suivantes.

- Demander à l'élève de développer les expressions  $(a + b)^6$  et  $(a + b)^7$  pour vérifier ses réponses tout en observant d'où proviennent les coefficients du développement (ceux de  $(a + b)^6$  en partant de ceux de  $(a + b)^5$  lorsqu'on développe  $(a + b)(a + b)^5$  et ceux de  $(a + b)^7$  en partant de ceux de  $(a + b)^6$  lorsqu'on développe  $(a + b)(a + b)^6$ ).
- Demander à l'élève d'expliquer la relation entre le triangle arithmétique de Pascal, et les coefficients du développement du binôme.
- Inviter l'élève à continuer le développement du triangle arithmétique de Pascal jusqu'à la quinzième ligne, puis lui indiquer de conserver cette feuille puisqu'elle sera utilisée dans une activité ultérieure.
- Inviter l'élève à faire vérifier son travail par ses pairs. **(EF)**
- Montrer à l'élève l'utilité du triangle arithmétique de Pascal pour développer un binôme comme  $(2a - 3b)^5$ , tout en mettant l'accent sur la clarté de la présentation.
- Assigner à l'élève quelques exercices de développement de binômes et l'inviter à les terminer.
- Présenter à l'élève des exercices semblables (voir *Mathématiques discrètes*, section 7-1) et lui demander de vérifier ses réponses en les comparant à celles de ses pairs. **(EF)**
- Présenter à l'élève des problèmes plus complexes (voir *Mathématiques discrètes*, p. 183-185, n<sup>os</sup> 13, 15, 17) et lui demander de faire vérifier son travail par ses pairs. **(EF)**

### Évaluation sommative

- Voir **Évaluation sommative** de l'activité 5.5.

### Activités complémentaires/Réinvestissement

- Demander à l'élève d'effectuer une recherche sur l'utilisation du triangle arithmétique avant Pascal, entre autres par les Chinois, puis d'en présenter les résultats au groupe-classe.

### Annexes

(espace réservé à l'enseignant ou à l'enseignante pour l'ajout de ses propres annexes)

## ACTIVITÉ 5.2 (MGA4U)

### Développement du binôme à l'aide de $\binom{n}{r}$

#### Description

**Durée :** 180 minutes

Dans cette activité, l'élève établit, par exploration, un lien entre la combinatoire et les coefficients du développement du binôme pour résoudre des problèmes qui s'y rapportent.

#### Domaines, attentes et contenus d'apprentissage

**Domaine :** Mathématiques discrètes

**Attente :** MGA4U-M-A.1

**Contenus d'apprentissage :** MGA4U-M-Tech.6 - 7

#### Notes de planification

- Se procurer la vidéo de l'émission *Le théorème du binôme*, de la série «L'Analyse combinatoire» de tfo, puis réserver un téléviseur et un magnétoscope pour la visionner.
- Préparer les exemples et les exercices qui seront utilisés au cours de cette activité.
- Préparer une feuille sur laquelle on trouve diverses questions de révision qui portent sur le théorème du binôme.

#### Déroulement de l'activité

##### Mise en situation

- Présenter à l'élève le problème utilisé dans la mise en situation de l'activité 5.1 et lui demander de montrer que les nombres de trajets, de n'importe quel coin de rues, peuvent être obtenus en considérant le problème comme étant un problème d'arrangements avec objets identiques.
- Animer une mise en commun d'idées sur le résultat. **(ED)**  
*Exemple de solution :*
  - Pour se rendre au coin situé quatre rues à droite et deux rues plus haut que le point de départ, il faut choisir la façon de placer les lettres D (droite), D, D, D, H (haut), H dans un certain ordre. Chaque ordre des lettres correspond à un trajet différent. Le nombre de trajets est donc équivalent au nombre d'arrangements des lettres, soit  $\frac{6!}{4!2!}$ .

## Expérimentation/Exploration/Manipulation

- Demander à l'élève d'expliquer la raison pour laquelle chaque nombre du problème qui précède peut aussi être considéré comme un nombre de la forme  $\binom{n}{r}$ .
- Animer une mise en commun d'idées pour connaître la réponse de l'élève. **(ED)**
- Expliquer à l'élève que le nombre de trajets est équivalent au nombre de façons de choisir les quatre places, sur six, où l'on placera les lettres D. Ce nombre est égal à  $\binom{6}{4}$ . On remarque que  $\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!2!}$ , est la même réponse que celle de l'approche par permutations.
- Demander à l'élève de trouver un lien entre le triangle arithmétique de Pascal et la forme  $\binom{n}{r}$ .
- Conclure que le triangle arithmétique de Pascal est formé de nombres de la forme  $\binom{n}{r}$ , puis demander à l'élève d'écrire les premières lignes du triangle en employant ce symbole.
- Présenter à l'élève des binômes, comme  $(3a - 5)^6$ , et lui demander de les développer à l'aide de la formule du binôme, puis de vérifier ses réponses auprès de ses pairs. **(EF)**
- Présenter à l'élève des binômes à développer et lui demander de déterminer les coefficients de certains termes particuliers (p. ex., détermine le terme en  $a^4b^2$  dans le développement de  $(2a - 3b)^6$ , ainsi que le terme général).
- Demander à l'élève de vérifier ses réponses auprès de ses pairs. **(EF)**
- Présenter à l'élève des binômes complexes, comme  $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^{20}$ , puis lui demander d'exprimer le terme général sous forme simplifiée et de déterminer le coefficient de termes particuliers, comme le terme en  $x^8$  (voir *Mathématiques discrètes*, pages 197 et 198).
- Inviter l'élève à faire vérifier son travail par ses pairs. **(EF)**
- Présenter à l'élève des exercices et des problèmes (p. ex., *Mathématiques discrètes*, section 7-5), puis lui demander de faire vérifier son travail par ses pairs. **(EF)**
- Distribuer à l'élève une feuille sur laquelle on trouve différentes questions de révision qui portent sur le théorème du binôme.
- Présenter à l'élève l'émission intitulée *Le théorème du binôme* de la série «L'Analyse combinatoire» de tfo, puis lui demander de répondre aux questions.
- Discuter de l'émission avec l'élève et faire la correction du travail de révision. **(EF)**

## Évaluation sommative

- Voir **Évaluation sommative** de l'activité 5.5.

### **Activités complémentaires/Réinvestissement**

- Demander à l'élève de prouver des propositions différentes à l'aide du théorème du binôme (p. ex., le coefficient de  $x^n$  de  $(1+x)^{2n}$  est le double du coefficient de  $x^n$  de  $(1+x)^{2n-1}$ ).

### **Annexes**

**(espace réservé à l'enseignant ou à l'enseignante pour l'ajout de ses propres annexes)**

## ACTIVITÉ 5.3 (MGA4U)

### Raisonnement par récurrence

#### Description

**Durée :** 300 minutes

Dans cette activité, l'élève explore le principe du raisonnement par récurrence et l'utilise pour montrer les formules de la somme des termes de diverses séries ainsi que la formule du binôme.

#### Domaines, attentes et contenus d'apprentissage

**Domaine :** Mathématiques discrètes

**Attente :** MGA4U-M-A.2

**Contenus d'apprentissage :** MGA4U-M-Rai.1 - 2 - 3 - 4

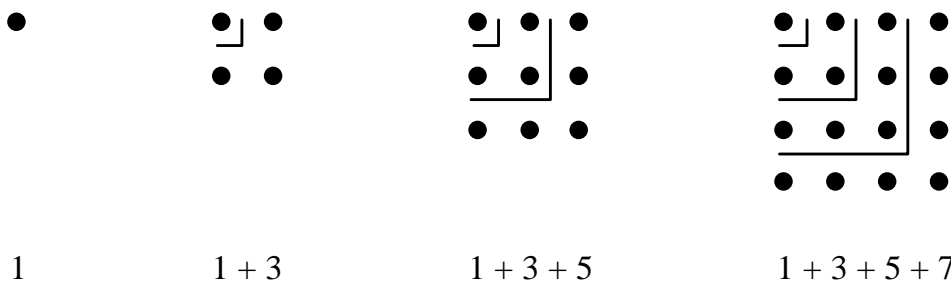
#### Notes de planification

- Préparer les exemples et les exercices qui seront utilisés au cours de cette activité.
- Préparer un transparent pour illustrer la série  $1 + 3 + 5 + 7 + \dots$  de la mise en situation.

#### Déroulement de l'activité

##### Mise en situation

- Montrer à l'élève, sur un transparent, un exemple qui illustre la série  $1 + 3 + 5 + 7 + \dots$  tel que celui qui suit :



- Demander à l'élève, qui travaille en équipe de quatre, de déterminer une expression pour trouver la somme des  $n$  premiers termes de sa série et de prouver le résultat.
- Animer une mise en commun d'idées sur la validité de la preuve. **(ED)**

## Expérimentation/Exploration/Manipulation

### Propositions et raisonnement par récurrence

- Donner à l'élève des exemples de propositions qui présentent la somme d'une série au moyen de la variable  $n$ , lui montrer la façon de les représenter par  $P_n$ , puis lui demander d'écrire quelques propositions particulières comme  $P_1$  et  $P_4$ , ainsi que la proposition  $P_{k+1}$ .

*Exemple :*

- Soit  $P_n$  la proposition  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ . Écrire  $P_1$ ,  $P_4$  et  $P_{k+1}$ .

(Réponses :  $P_1 = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$ ,  $P_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = \frac{4(4+1)}{2}$  et

$$P_{k+1} = 1 + 2 + 3 + \dots + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

- Présenter à l'élève le principe du raisonnement par récurrence :
  - Pour montrer qu'une proposition  $P_n$  est vraie pour tout entier positif  $n$  :
    - On montre que  $P_1$  est vrai.
    - On montre que si  $P_k$  est vrai, alors  $P_{k+1}$  est vrai.
    - On conclut que  $P_n$  est vrai pour tout entier positif  $n$ .
- Présenter à l'élève, au tableau, la manière de montrer, au moyen du raisonnement par récurrence, que  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$  pour tout entier positif  $n$ .

*Exemple :*

Soit  $P_n$  la proposition  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ .

Puisque  $1 = 1^2$ , la proposition  $P_1$  est vraie.

Supposons que  $P_k$  est vrai, c'est-à-dire que  $1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2$ .

On veut montrer que  $P_{k+1}$  est vraie, c'est-à-dire que  $1 + 3 + 5 + \dots + (2k + 1) = (k + 1)^2$ .

$$\text{M.G.} = 1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1)$$

$$= k^2 + (2k + 1) \text{ selon l'hypothèse}$$

$$= (k + 1)^2$$

$$= \text{M.D.}$$

Donc la proposition  $P_{k+1}$  est vraie.

Selon le principe du raisonnement par récurrence, la proposition  $P_n$  est vraie pour tout entier positif  $n$ .

- Présenter à l'élève un autre exemple, au tableau, tout en lui expliquant le rôle de chaque étape du raisonnement par récurrence.
- Assigner à l'élève quelques exercices, puis lui demander de faire vérifier son travail par ses pairs (voir *Algèbre et géométrie*, de Anderson *et al.*, p. 290). **(EF)**
- Inviter quelques élèves à venir écrire leurs solutions au tableau ou sur un transparent. **(EF)**

### Notation sigma

- Présenter à l'élève des exemples de sommes de séries et montrer la façon de les exprimer au moyen de la notation sigma (voir *Algèbre et géométrie*, de Anderson *et al.*, p. 294).
- Montrer certaines propriétés de la notation sigma, p. ex.,  $\sum_{i=1}^n t_i + t_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} t_i$ .
- Présenter à l'élève, au tableau, une proposition  $P_n$  écrite sous la forme sigma et lui montrer la façon de prouver, au moyen du raisonnement par récurrence, que  $P_n$  est vrai pour tout entier positif  $n$ .

Exemple :

- Montrer que  $\sum_{i=1}^n i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$  pour tout entier positif  $n$ .

Soit  $P_n$  la proposition  $\sum_{i=1}^n i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ .

Puisque  $1(1+1) = \frac{1(1+1)(1+2)}{3}$ , la proposition  $P_1$  est vraie.

Supposons que  $P_k$  est vraie, c'est-à-dire que  $\sum_{i=1}^k i(i+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$ .

On veut montrer que  $P_{k+1}$  est vraie, c'est-à-dire que

$$\sum_{i=1}^{k+1} i(i+1) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}.$$

$$\begin{aligned} \text{M.G.} &= \sum_{i=1}^{k+1} i(i+1) \\ &= \sum_{i=1}^k i(i+1) + (k+1)(k+2) \\ &= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) \text{ selon l'hypothèse} \\ &= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + \frac{3(k+1)(k+2)}{3} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3} \\ &= \text{M.D.} \end{aligned}$$

Donc, la proposition  $P_{k+1}$  est vraie.

Selon le principe du raisonnement par récurrence, la proposition  $P_n$  est vraie pour tout entier positif  $n$ .

- Présenter à l'élève quelques sommes de séries, lui demander de les prouver au moyen du raisonnement par récurrence, puis l'inviter à faire vérifier son travail par ses pairs (voir *Algèbre et géométrie*, de Anderson *et al.*, p. 294). **(EF)**
- Inviter quelques élèves à venir transcrire leurs solutions au tableau ou sur un transparent. **(EF)**

- Demander à l'élève de dresser une liste des concepts acquis, depuis le début de l'unité, pour lui permettre d'évaluer son degré de compréhension. **(O)**

### *Formule du binôme*

- Revoir avec l'élève l'identité de Pascal  $\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$ , puis lui demander de la montrer.
- Présenter à l'élève la formule du binôme  $(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$ , puis lui demander de la prouver, au moyen du raisonnement par récurrence, tout en animant des mises en commun d'idées pour ce qui est des étapes difficiles.
- Animer une mise en commun d'idées pour vérifier la justesse, la communication et la clarté du travail de l'élève. **(EF)**

### **Évaluation sommative**

Voir **Évaluation sommative** de l'activité 5.5.

### **Activités complémentaires/Réinvestissement**

- Demander à l'élève de prouver des propositions différentes à l'aide du raisonnement par récurrence (voir *Algèbre et géométrie*, de Anderson *et al.*, chapitre 7).

*Exemples :*

- Montrer que  $5^n - 1$  est divisible par 4 pour tout entier positif  $n$ .
- Montrer que, pour tout entier positif  $n$ ,  $2n + 4 \leq (n + 2)!$

### **Annexes**

**(espace réservé à l'enseignant ou à l'enseignante pour l'ajout de ses propres annexes)**

## ACTIVITÉ 5.4 (MGA4U)

### Relations associées au triangle de Pascal

#### Description

**Durée :** 180 minutes

Dans cette activité, l'élève procède par tâtonnements et par observation pour découvrir des relations associées aux éléments du triangle arithmétique de Pascal, puis en fait la démonstration à l'aide du raisonnement par récurrence ainsi que de la déduction. L'activité lui permet de découvrir, de créer, de généraliser et de faire des démonstrations dans un domaine abstrait des mathématiques.

#### Domaines, attentes et contenus d'apprentissage

**Domaine :** Mathématiques discrètes

**Attente :** MGA4U-M-A.2

**Contenu d'apprentissage :** MGA4U-M-Rai.5

#### Notes de planification

- Préparer les exemples et les exercices qui seront utilisés au cours de cette activité.

#### Déroulement de l'activité

##### Mise en situation

- Demander à l'élève, qui travaille avec un ou une partenaire, de reprendre sa copie du triangle de Pascal préparée lors de l'activité 5.1, d'examiner le triangle arithmétique de Pascal, puis de découvrir des relations et des régularités intéressantes dans le triangle.

##### Expérimentation/Exploration/Manipulation

- Animer une mise en commun d'idées sur les régularités trouvées, puis demander à l'élève de généraliser ses découvertes en les exprimant au moyen des symboles  $\binom{n}{r}$  et de variables, tout en vérifiant ces généralisations, en attribuant aux variables des valeurs particulières. **(EF)**

Exemples :

- La somme des éléments de la ligne  $n$  est égale à  $2^n$  (la première ligne est la ligne 0), c'est-à-dire que  $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$ .
- La deuxième diagonale contient tous les entiers positifs, c'est-à-dire que  $\binom{n}{1} = n$  et  $\binom{n}{n-1} = n$ .
- La troisième diagonale est formée des nombres triangulaires : 1, 3, 6, 10, 15, ..., c'est-à-dire que les nombres  $\binom{n}{n-2}$  sont des nombres triangulaires.
- Régularité en forme de bâton de hockey  
Si on additionne les termes le long d'une diagonale, tout en s'arrêtant en chemin, la somme est égale au terme situé dans la ligne suivante, à côté du terme de la diagonale.

Exemples :

- On trouve les régularités ci-dessous dans le triangle :

1	1	1
4	4	6
10	10	21
15	20	56
	35	84

De plus,  $1 + 4 + 10 = 15$ ,  $1 + 4 + 10 + 20 = 35$  et  $1 + 6 + 21 + 56 = 84$ .

Ces régularités ont pour formule  $\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \dots + \binom{n+r}{r} = \binom{n+r+1}{r}$ .

- Les rangées numéro 2, 3, 5, 7, 11, 13 (nombres premiers) ne contiennent que des multiples du nombre indiquant la rangée, à l'exception du premier et du dernier, ce qui n'est pas vrai pour ce qui est des autres rangées. Par exemple, la 7<sup>e</sup> rangée contient les nombres 1, 7, 21 et 35 qui sont, à l'exception du 1, des multiples de 7. On peut généraliser en disant que, si  $n$  est un nombre premier, alors  $\binom{n}{r}$  est un multiple de  $n$  pour

$$r = 1, 2, 3, \dots, n-1.$$

- Demander à l'élève, qui travaille en équipe de quatre, de vérifier les solutions obtenues. **(EF)**
- Discuter avec l'élève des solutions obtenues pour en dégager tous les concepts importants.
- Demander à l'élève, qui travaille toujours en équipe de quatre, de montrer une de ses découvertes au moyen du raisonnement par récurrence.
- Inviter un membre de chaque équipe à venir en faire la démonstration au tableau tout en expliquant clairement les étapes de son raisonnement. **(EF)**
- Demander à chaque équipe de prendre en note les démonstrations des autres équipes.

- Discuter avec l'élève des étapes à suivre pour faire les démonstrations en s'assurant qu'elles sont toutes complètes.

### **Évaluation sommative**

- Voir **Évaluation sommative** de l'activité 5.5.

### **Activités complémentaires/Réinvestissement**

- Demander à l'élève de trouver d'autres relations ou régularités du triangle arithmétique de Pascal, à l'aide d'Internet, puis de présenter au groupe-classe les résultats de sa recherche.  
(T)

### **Annexes**

**(espace réservé à l'enseignant ou à l'enseignante pour l'ajout de ses propres annexes)**

## ACTIVITÉ 5.5 (MGA4U)

### Résolution de problèmes 5

#### Description

**Durée :** 300 minutes

Dans cette activité, l'élève résout une variété de problèmes qui font appel aux notions acquises tout le long du cours. L'activité lui permet de parfaire ses connaissances, son savoir-faire et ses compétences.

#### Domaines, attentes et contenus d'apprentissage

**Domaine :** Démonstrations et résolution de problèmes

**Attentes :** MGA4U-D-A.2 - 3

**Contenus d'apprentissage :** MGA4U-D-Stra.1 - 2 - 4  
MGA4U-D-Prob.1 - 2 - 3

#### Notes de planification

- S'assurer d'avoir à la portée de la main la série de problèmes préparés lors de l'activité 1.5.
- Préparer les exemples et les problèmes qui seront présentés au cours de cette activité.
- Préparer un tableau de vérification de la maîtrise des concepts.
- Préparer une tâche d'évaluation sommative qui porte sur les activités de l'unité 5.

#### Déroulement de l'activité

##### Mise en situation

- Demander à l'élève de montrer, au moyen d'une discussion, que les coefficients du développement du binôme peuvent être placés sous la forme d'un triangle et que l'on peut déterminer chaque ligne du triangle en partant de la ligne précédente.
- Demander à l'élève d'indiquer, avec une justification à l'appui, si elle ou il croit que cette régularité s'applique à tous les polynômes.
- Inviter l'élève à vérifier sa réponse en effectuant le développement de divers polynômes (p. ex., un trinôme).
- Discuter avec l'élève de ses réponses. **(ED)**

## Expérimentation/Exploration/Manipulation

- Indiquer à l'élève que le but de l'activité est de découvrir une façon de placer les coefficients du développement du trinôme  $(a + b + c)^n$  de manière qu'il soit possible de déterminer facilement les coefficients d'un développement en partant des coefficients de la puissance précédente.
- Accompagner l'élève dans sa recherche, qui s'étendra sur plus d'une période, et, au besoin, lui faire quelques suggestions (voir *Mathématiques discrètes*, pages 192-193).

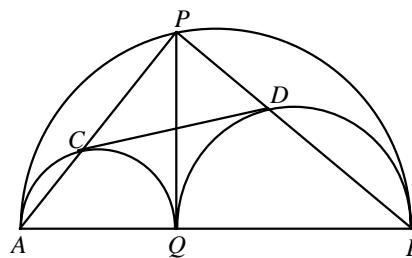
*Exemples :*

- Observer d'où provient chaque coefficient, (p. ex., lorsqu'on obtient les coefficients du développement de  $(a + b + c)^4$  en partant des coefficients du développement de  $(a + b + c)^3$  en multipliant  $(a + b + c)(a + b + c)^3$ ).
- Placer les coefficients du développement de  $(a + b + c)^2$  de manière qu'il soit facile de faire les additions qui donneront les coefficients du développement de  $(a + b + c)^3$ , ...
- Animer une mise en commun d'idées pour connaître les résultats et les conclusions de l'élève. **(EF)**
- Présenter à l'élève, qui travaille en équipe de quatre, une variété d'applications et de problèmes qui lui permettent de revoir ainsi que d'approfondir certains concepts présentés tout le long du cours.

*Exemples :*

- Soit un quadrilatère  $ABCD$ , où  $A(-1, 4, -2)$ ,  $B(1, 6, 2)$ ,  $C(1, 6, 22)$  et  $D(-3, 2, 4)$ . Soit  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  et  $S$  les milieux respectifs des côtés  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  et  $DA$ .
  - a) Montrer que  $PQRS$  est un parallélogramme.
  - b) Sachant que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu, déterminer les coordonnées du point d'intersection  $M$  des diagonales.
  - c) Déterminer, au degré près, la mesure de l'angle aigu entre les diagonales de  $PQRS$ .
- Soit deux vecteurs,  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$ , formant un angle de  $60^\circ$  tels que  $|\vec{a}| = 5$  et  $|\vec{b}| = 8$ . Déterminer la valeur exacte de  $|\vec{a} + \vec{b}|$  et de  $|\vec{a} - \vec{b}|$ .
- Déterminer les coordonnées du point  $Q$ , symétrique du point  $P(3, -4, -6)$  par rapport au plan qui passe par les points  $D(-6, 1, -5)$ ,  $E(7, -2, -1)$  et  $F(10, -7, 1)$ .
- Déterminer la distance du point  $P(2, 3, -1)$  à la droite d'intersection des plans définis par  $2x - 2y + z + 3 = 0$  et  $3x - 2y + 2z + 17 = 0$ .

- Les trois demi-cercles sont tangents l'un à l'autre et leurs centres sont situés sur le segment  $AB$ . Le segment  $PQ$  est perpendiculaire au segment  $AB$ . Les points  $C$  et  $D$  sont les points d'intersection respectifs des segments  $AP$  et  $BP$  et des petits demi-cercles. Montrer que le segment  $CD$  est tangent aux deux petits demi-cercles (tiré de *Problems, Problems, Problems*, vol. 5, page 41).



- Montrer que l'expression  $(3 + 2\sqrt{2})^{2n-1} + (2 - 2\sqrt{2})^{2n-1} - 2$  est égale à un carré parfait pour tout entier positif  $n$  (tiré de *Problems, Problems, Problems*, vol. 3, page 52).
- Circuler et aider les équipes, au besoin. **(EF)**
- Demander à chaque équipe de présenter au tableau la solution d'un problème choisi et d'expliquer clairement les étapes du raisonnement suivi. **(EF)**
- Remettre à l'élève un tableau de vérification de la maîtrise des concepts tel que celui présenté à l'activité 3.2. **(O)**
- Faire passer à l'élève une tâche d'évaluation sommative qui porte sur les activités de l'unité 5. **(ES)**

### Évaluation sommative

- Présenter à l'élève une tâche d'évaluation sommative qui porte sur l'unité 5 à l'aide d'un test papier-crayon et en utilisant une grille d'évaluation adaptée qui comporte des critères précis de rendement en fonction des quatre compétences. L'élève doit pouvoir :
  - Connaissance et compréhension
    - développer des binômes à l'aide du triangle arithmétique de Pascal et de la formule du binôme.
  - Réflexion, recherche et résolution de problèmes
    - résoudre des problèmes à l'aide du triangle de Pascal et de la formule du binôme;
    - déterminer si une formule de la somme d'une série est valide et, le cas échéant, démontrer la formule à l'aide du raisonnement par récurrence.
  - Communication
    - communiquer son raisonnement en intégrant l'écriture et les symboles appropriés;
    - utiliser correctement la langue, les symboles et le vocabulaire mathématique.
  - Mise en application
    - déterminer le coefficient de certains termes à l'aide du théorème du binôme.

### Activités complémentaires/Réinvestissement

- Demander à l'élève de considérer chaque coefficient du développement du trinôme comme un nombre d'arrangement des lettres  $a$ ,  $b$  et  $c$ , de déterminer une formule générale pour résoudre les coefficients et d'utiliser cette formule pour développer divers trinômes.

## **Annexes**

**(espace réservé à l'enseignant ou à l'enseignante pour l'ajout de ses propres annexes)**

Annexe MGA4U 5.5.1 : Grille d'évaluation adaptée - Formule du binôme

Grille d'évaluation adaptée - Formule du binôme

Annexe MGA4U 5.5.1

<i>Type d'évaluation : diagnostique <input type="checkbox"/> formative <input type="checkbox"/> sommative <input checked="" type="checkbox"/></i>				
<i>Compétences et critères</i>	<i>50 - 59 % Niveau 1</i>	<i>60 - 69 % Niveau 2</i>	<i>70 - 79 % Niveau 3</i>	<i>80 - 100 % Niveau 4</i>
<i>Connaissance et compréhension</i>				
L'élève : - démontre une compréhension des concepts associés au triangle arithmétique de Pascal et à la formule du binôme. - exécute des algorithmes pour développer des binômes.	L'élève démontre une <b>compréhension limitée</b> des concepts et exécute <b>uniquement</b> des algorithmes <b>simples</b> par écrit et à l'aide d'un outil technologique.	L'élève démontre une <b>compréhension partielle</b> des concepts et exécute des algorithmes par écrit, mentalement et à l'aide d'un outil technologique, <b>avec une certaine exactitude.</b>	L'élève démontre une <b>compréhension générale</b> des concepts et exécute des algorithmes par écrit, <b>mentalement</b> et à l'aide d'un outil technologique, <b>avec exactitude.</b>	L'élève démontre une <b>compréhension approfondie</b> des concepts et choisit l'algorithme <b>le plus efficace</b> et l'exécute par écrit, mentalement et à l'aide d'un outil technologique, <b>avec exactitude.</b>
<i>Réflexion, recherche et résolution de problèmes</i>				
L'élève : - suit un raisonnement en déterminant si une formule de la somme d'une série est valide et, le cas échéant, en démontrant la formule à l'aide du raisonnement par récurrence. - applique des étapes d'un processus d'enquête et de résolution de problèmes pour résoudre des problèmes à l'aide du triangle de Pascal et de la formule du binôme.	L'élève suit des raisonnements de mathématiques <b>simples</b> et utilise une stratégie <b>non convenable, et s'arrête en chemin, tout en montrant une compréhension de certains concepts.</b>	L'élève suit des raisonnements de mathématiques <b>d'une certaine complexité</b> et utilise une stratégie <b>non convenable, et poursuit son travail jusqu'à la fin.</b>	L'élève suit des raisonnements de mathématiques <b>complexes</b> et utilise une stratégie <b>convenable, tout en commettant une erreur majeure.</b>	L'élève suit des raisonnements de mathématiques <b>complexes</b> et une stratégie <b>convenable</b> et obtient une réponse, <b>en commettant rarement des erreurs mineures de calcul ou de copiage de données.</b>

<i>Communication</i>				
L'élève : - utilise la terminologie et les symboles propres aux mathématiques. - présente et justifie les étapes de son raisonnement.	L'élève utilise <b>rarement</b> la langue, les symboles, les diagrammes et les conventions propres aux mathématiques et présente et justifie <b>rarement</b> les étapes de son raisonnement de façon cohérente.	L'élève utilise <b>parfois</b> la langue, les symboles, les diagrammes et les conventions propres aux mathématiques et présente et justifie <b>parfois</b> les étapes de son raisonnement de façon cohérente.	L'élève utilise <b>souvent</b> la langue, les symboles, les diagrammes et les conventions propres aux mathématiques et présente et justifie <b>souvent</b> les étapes de son raisonnement de façon cohérente.	L'élève utilise <b>presque toujours</b> la langue, les symboles, les diagrammes et les conventions propres aux mathématiques et présente et justifie <b>presque toujours</b> les étapes de son raisonnement de façon cohérente.
<i>Mise en application</i>				
L'élève : - détermine le coefficient de certains termes à l'aide du théorème du binôme.	L'élève applique ses connaissances et son savoir-faire pour résoudre des problèmes <b>simples dans des contextes familiaux</b> .	L'élève applique ses connaissances et son savoir-faire pour résoudre des problèmes <b>d'une certaine complexité dans des contextes familiaux</b> .	L'élève applique ses connaissances et son savoir-faire pour résoudre des problèmes <b>complexes dans des contextes familiaux</b> .	L'élève applique ses connaissances et son savoir-faire pour résoudre des problèmes <b>complexes dans des contextes familiaux et peu familiaux</b> .
Remarque : L'élève dont le rendement est en deçà du niveau 1 (moins de 50 %) n'a pas satisfait aux attentes pour cette tâche.				

## TABLEAU DES ATTENTES ET DES CONTENUS D'APPRENTISSAGE

<b>GÉOMÉTRIE ET MATHÉMATIQUES DISCRÈTES</b>		<b>Unités</b>				
<i>Domaine : Géométrie</i>		1	2	3	4	5
<b>Attentes</b>						
MGA4U-G-A.1	effectuer des opérations sur les vecteurs, de façon algébrique et géométrique.	1.1 1.2 1.3 1.4	2.2 2.5			
MGA4U-G-A.2	déterminer l'intersection de droites et de plans dans l'espace tridimensionnel.		2.1 2.2 2.3 2.4 2.5			
<b>Contenus d'apprentissage : Opérations sur les vecteurs</b>						
MGA4U-G-Opé.1	représenter des vecteurs au moyen de segments de droites orientés.	1.1				
MGA4U-G-Opé.2	additionner et soustraire des vecteurs et les multiplier par des scalaires, de façon géométrique.	1.1				
MGA4U-G-Opé.3	déterminer la composante et la projection d'un vecteur sur un autre.	1.1				
MGA4U-G-Opé.4	modéliser et résoudre des problèmes de vecteur-vitesse et de force.	1.1				
MGA4U-G-Opé.5	déterminer et interpréter de façon géométrique le produit scalaire et le produit vectoriel de vecteurs.	1.3	2.2			
MGA4U-G-Opé.6	représenter des vecteurs, dans le plan et dans l'espace tridimensionnel, au moyen de composantes.	1.2 1.4				
MGA4U-G-Opé.7	additionner et soustraire des vecteurs et les multiplier par des scalaires, au moyen de composantes.	1.2 1.4				
MGA4U-G-Opé.8	déterminer le produit scalaire et le produit vectoriel de vecteurs, au moyen de composantes.	1.3	2.2			

<b>GÉOMÉTRIE ET MATHÉMATIQUES DISCRÈTES</b>		<b>Unités</b>				
<i>Domaine : Géométrie</i>		1	2	3	4	5
<b>Contenus d'apprentissage : Intersection de droites et de plans dans l'espace</b>						
MGA4U-G-DrPl.1	déterminer des équations vectorielles, paramétriques et symétriques de droites dans le plan et dans l'espace tridimensionnel.		2.1 2.5			
MGA4U-G-DrPl.2	déterminer l'intersection de droites dans l'espace tridimensionnel.		2.3 2.5			
MGA4U-G-DrPl.3	déterminer des équations vectorielles, paramétriques et cartésiennes de plans dans l'espace tridimensionnel.		2.2 2.5			
MGA4U-G-DrPl.4	déterminer l'intersection d'une droite et d'un plan dans l'espace tridimensionnel.		2.3 2.5			
MGA4U-G-DrPl.5	résoudre des systèmes d'équations du premier degré (comportant jusqu'à trois inconnues) par la méthode de Gauss, avec et sans l'aide de la technologie.		2.3 2.5			
MGA4U-G-DrPl.6	interpréter les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice comme une transformation d'un système d'équations du premier degré en un système équivalent.		2.3 2.5			
MGA4U-G-DrPl.7	déterminer l'intersection de deux ou trois plans en établissant et en résolvant un système d'équations du premier degré à trois inconnues.		2.3 2.5			
MGA4U-G-DrPl.8	décrire géométriquement un système de deux équations du premier degré à deux inconnues et un système de trois équations du premier degré à trois inconnues et relier l'interprétation géométrique au nombre de solutions du système.		2.3 2.5			
MGA4U-G-DrPl.9	résoudre des problèmes ayant trait à l'intersection de droites et de plans en justifiant clairement les étapes de son raisonnement.		2.3 2.4 2.5			

<b>GÉOMÉTRIE ET MATHÉMATIQUES DISCRÈTES</b>		<b>Unités</b>				
<b>Domaine : Démonstrations et résolution de problèmes</b>		1	2	3	4	5
<b>Attentes</b>						
MGA4U-D-A.1	démontrer des propriétés des figures planes à l'aide de la géométrie analytique, de démonstrations algébriques et de méthodes vectorielles.			3.1 3.2 3.3 3.4		
MGA4U-D-A.2	utiliser une variété de stratégies pour résoudre des problèmes.	1.5	2.4	3.3 3.5	4.5	5.5
MGA4U-D-A.3	résoudre des problèmes complexes de façon indépendante.	1.5	2.4	3.5	4.5	5.5
<b>Contenus d'apprentissage : Démonstration des propriétés des figures planes</b>						
MGA4U-D-Dém.1	démontrer une compréhension de la démonstration, de ses caractéristiques (p. ex., le rôle des axiomes, l'utilisation de la forme «si... alors»; l'utilisation de la forme «si et seulement si» et l'importance de prouver l'équivalence des deux propositions; le fait que la réciproque d'une proposition est différente de la proposition) et de son rôle par rapport au raisonnement par induction.			3.1 3.2 3.3		
MGA4U-D-Dém.2	démontrer des propriétés de figures planes (p. ex., les cercles, les droites parallèles, les triangles congrus et les triangles rectangles) et certains aspects du théorème de Pythagore au moyen d'un raisonnement déductif.			3.2 3.3		
MGA4U-D-Dém.3	démontrer algébriquement des propriétés de figures planes au moyen de la géométrie analytique (p. ex., les milieux des côtés d'un quadrilatère sont les sommets d'un parallélogramme, le segment qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté).			3.4		
MGA4U-D-Dém.4	démontrer certaines propriétés de figures planes à l'aide de vecteurs.			3.4		
MGA4U-D-Dém.5	démontrer certaines propriétés de figures planes au moyen de la preuve indirecte.			3.2		
MGA4U-D-Dém.6	démontrer une compréhension de la relation entre une démonstration formelle et une illustration des caractéristiques au moyen d'un logiciel de géométrie dynamique.			3.3		

<b>GÉOMÉTRIE ET MATHÉMATIQUES DISCRÈTES</b>		<b>Unités</b>				
<b>Domaine : Démonstrations et résolution de problèmes</b>		1	2	3	4	5
<b>Contenus d'apprentissage : Stratégies de résolution de problèmes</b>						
MGA4U-D-Stra.1	résoudre des problèmes en combinant efficacement une variété de stratégies (p. ex., remue-ménages, étude de cas, approche algébrique, géométrie ou vectorielle, approche directe ou indirecte, travail à rebours, visualisation à l'aide de matériel concret, de diagrammes ou de logiciels, calcul itératif, variation des données du problème, modélisation, utilisation d'un système de coordonnées).	1.5	2.4	3.5	4.5	5.5
MGA4U-D-Stra.2	résoudre un même problème en utilisant une variété d'approches.	1.5	2.4	3.5	4.5	5.5
MGA4U-D-Stra.3	utiliser avec efficacité la technologie pour énoncer et vérifier des hypothèses.			3.3	4.5	
MGA4U-D-Stra.4	résoudre des problèmes complexes en justifiant clairement les étapes de son raisonnement.	1.5	2.4	3.5	4.5	5.5
<b>Contenus d'apprentissage : Problèmes de grande portée</b>						
MGA4U-D-Prob.1	résoudre des problèmes de grande portée, de façon indépendante, seul et en petits groupes.			3.5	4.5	5.5
MGA4U-D-Prob.2	travailler avec persévérance sur la résolution d'un problème pouvant s'échelonner sur une période de temps.			3.5	4.5	5.5
MGA4U-D-Prob.3	démontrer un apprentissage significatif dans des tâches telles que la résolution de problèmes difficiles, la recherche exigée par des problèmes, l'application des mathématiques, la création de démonstrations, l'utilisation efficace de la technologie et la présentation de sujets du cours ou de leur prolongement.	1.5	2.4	3.5	4.5	5.5

<b>GÉOMÉTRIE ET MATHÉMATIQUES DISCRÈTES</b>		<b>Unités</b>				
<i>Domaine : Mathématiques discrètes</i>		1	2	3	4	5
<b>Attentes</b>						
MGA4U-M-A.1	résoudre des problèmes à l'aide de techniques de combinatoire.				4.1 4.2 4.3 4.4	5.1 5.2
MGA4U-M-A.2	démontrer des identités au moyen du raisonnement par récurrence.					5.3 5.4
<b>Contenus d'apprentissage : Techniques de combinatoire</b>						
MGA4U-M-Tech.1	résoudre des problèmes simples faisant appel aux principes élémentaires du dénombrement				4.1	
MGA4U-M-Tech.2	exprimer les réponses aux problèmes d'arrangement, de permutation et de combinaison [p. ex., $A_n^r$ et $\binom{n}{r}$ ].				4.1 4.2 4.3	
MGA4U-M-Tech.3	évaluer des expressions numériques faisant appel à la notation factorielle à l'aide d'une méthode appropriée (p. ex., mentalement, par écrit, à l'aide d'une calculatrice).				4.2 4.3	
MGA4U-M-Tech.4	résoudre des problèmes de permutation et de combinaison, y compris des problèmes qui exigent l'examen de plusieurs cas.				4.1 4.3 4.4	
MGA4U-M-Tech.5	expliquer les solutions de problèmes de combinatoire de façon claire et précise.				4.1 4.3 4.4	
MGA4U-M-Tech.6	identifier les éléments du triangle arithmétique de Pascal et les relier aux coefficients du développement du binôme et aux valeurs de $\binom{n}{r}$ .					5.1 5.2
MGA4U-M-Tech.7	résoudre des problèmes ayant trait au développement du binôme					5.2
<b>Contenus d'apprentissage : Raisonnement par récurrence</b>						
MGA4U-M-Rai.1	démontrer une compréhension du principe de raisonnement par récurrence.					5.3
MGA4U-M-Rai.2	utiliser la notation sigma pour représenter une série ou la somme d'une série.					5.3
MGA4U-M-Rai.3	démontrer les formules pour la somme des termes de diverses séries, au moyen du raisonnement par récurrence.					5.3
MGA4U-M-Rai.4	démontrer la formule du binôme au moyen du raisonnement par récurrence.					5.3

<b>GÉOMÉTRIE ET MATHÉMATIQUES DISCRÈTES</b>		<b>Unités</b>				
<i>Domaine : Mathématiques discrètes</i>		1	2	3	4	5
MGA4U-M-Rai.5	démontrer des relations associées aux nombres du triangle arithmétique de Pascal, par déduction et au moyen du raisonnement par récurrence.					5.4